Fourier transzformáció

2021. március 1.

Fourier sor

Tekintsünk egy T periódusidejű periódikus függvényt, amely a $(0, T)$ intervallumon abszolút integrálható

$$f(t+T) = f(t)\ , \qquad \int_0^T f(t)dt < \infty\ .$$

Ezek a függvények egy lineáris vektorteret alkotnak a valós számtest felett a pontonkénti összeadás műveletével. Definiáljuk a következő belső szorzatot:

$$(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt\ , \quad f,g:\ \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \quad f(t+T) = f(t), g(t+T) = g(t)$$

A $\sin(\frac{2n\pi}{T}t)$ és $\cos(\frac{2n\pi}{T}t)$ függvények ($n \in \mathcal{Z}$) bázist alkotnak a vektortéren.

$$\int_0^T \sin(\frac{2n\pi}{T}t)\sin(\frac{2m\pi}{T}t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^T \cos(\frac{2n\pi}{T}t)\cos(\frac{2m\pi}{T}t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^T \sin(\frac{2n\pi}{T}t)\cos(\frac{2m\pi}{T}t)dt = 0$$

Fourier sor

$$\int_0^T \sin(\frac{2n\pi}{T}t)\sin(\frac{2m\pi}{T}t)dt = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx$$

$$= \frac{T}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right)dx = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

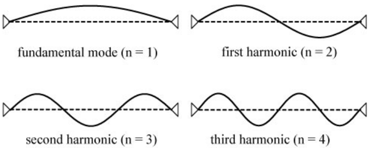
$$\int_0^T \cos(\frac{2n\pi}{T}t)\cos(\frac{2m\pi}{T}t)dt = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx$$

$$= \frac{T}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\right)dx = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^T \sin(\frac{2n\pi}{T}t)\cos(\frac{2m\pi}{T}t)dt = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx$$

$$= \frac{T}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\right)dx = 0$$

Fourier együtthatók



Gitárhúrok különböző módusai

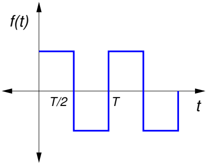
A gitárhúr módusai: $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$, ahol L a húr hossza. A gitár húr módusaiból tetszőleges állóhullám felépíthető. Az állóhullám kezdeti alakját a pengetés helye határozza meg. Az időbeni feljlődést befolyásolja a gitár rezonátor része.

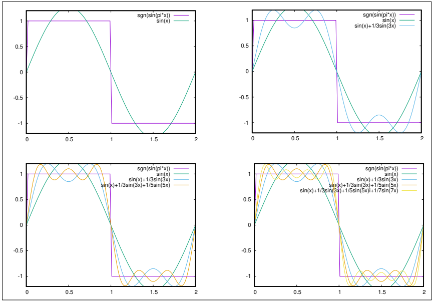
Fourier együtthatók

Fourier együtthatók:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2n\pi}{T}t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2n\pi}{T}t)dt$$





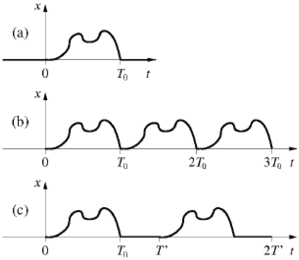
Határozzuk meg egy négyszöghullám Fourier együtthatóit: $f(t)$ páratlan $\Rightarrow$ csak szinuszos együtthatók maradnak:

$$a_n = 2\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2n\pi}{T}t)dt = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\Big|_0^{T/2} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$a_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2m+1}$$ csak páratlan együtthatók maradnak

Fourier transzformáció

- Lehet-e Fourier sora egy nem periódikus függvénynek?



Tekintsünk egy véges tartójú függvényt és szerkesszünk belőle egy periódikus függvényt.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

Növeljük a periódusidőt. Ha T-vel tartunk a végtelenhez, az izolált függvény sorát kapjuk. A periódusidő növekedtével két szomszédos frekvencia közötti különbség csökken: $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Vezessünk be új együtthatókat:

$$A_{n,T} = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\,, \qquad B_{n,T} = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

Fourier transzformáció

$$A_{n,T} = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\ , \qquad B_{n,T} = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

Írjuk fel a függvény sorát:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n,T}\sin\left(n\Delta\omega t\right) + B_{n,T}\cos\left(n\Delta\omega t\right)\right)\Delta\omega$$

Ha $T \to \infty$ akkor $\Delta\omega \to 0$ és $n\Delta\omega = \omega$ folytonos változóvá válik és az összegzés helyett integrált alkalmazunk:

$$f(t) = \int_0^{\infty}\left(A(\omega)\sin(\omega t) + B(\omega)\cos(\omega t)\right)d\omega$$

A Fourier együtthatók:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\ , \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

Feltételeztük, hogy $f(t)$ véges tartójú. Általában gyengébb feltétel is elég a Fourier transzformált létezéséhez. Ha a függvény végtelenben nem tünik el, akkor általában gond van a Fourier transzformáltjával.

Komplex Fourier transzformáció

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\ , \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

Fejezzük ki a szinusz és koszius függvényeket az Euler formula segítségével:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\ , \qquad \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

és állítsuk elő az $f(t)$ függvényt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty}\left(A(\omega)\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) + B(\omega)\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)\right)d\omega \\ &= \int_0^{\infty}\underbrace{\frac{B(\omega) - iA(\omega)}{2}}_{F(\omega)} e^{i\omega t}d\omega + \int_0^{\infty}\underbrace{\frac{B(\omega) + iA(\omega)}{2}}_{F(-\omega)} e^{-i\omega t}d\omega \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $A(-\omega) = -A(\omega)$ és $B(-\omega) = B(\omega)$.

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega + \int_0^{\infty} F(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Összefoglalva

Fourier transzformáció

$$F(\omega) = \frac{B(\omega) - iA(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Komplex Fourier transzformáció

Néhány függvény Fourier transzformáltja: $e^{i\omega_0 t}$

Korábban láttuk:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(ax)}{x}=\delta(x)$$

Számítsuk ki a $e^{i\omega_0 t}$ Fourier transzformáltját:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{i(\omega_0-\omega)t}dt=\frac{1}{i2\pi(\omega_0-\omega)}\left(e^{i(\omega_0-\omega)a}-e^{-i(\omega_0-\omega)a}\right)$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin((\omega_0-\omega)a)}{\omega_0-\omega}=\delta(\omega_0-\omega)$$

Használjuk a Fourier transzformációra a következő jelölést:

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=F(\omega)$$

Tehát:

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t})=\delta(\omega_0-\omega)$$

$$\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))=\frac{1}{2}(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega))\ ,\quad \mathcal{F}(\sin(\omega_0 t))=-\frac{i}{2}(\delta(\omega_0-\omega)-\delta(\omega_0+\omega))$$

Komplex Fourier transzformáció tulajdonságai

- Létezik a Fourier transzformáció inverze:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \;, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[f(t)\right]\right] = f(t) \;, \qquad \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]\right] = F(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[f(t)\right]\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'}dt' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega}_{2\pi\delta(t'-t)} = f(t)$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')e^{i\omega' t}d\omega'\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega'-\omega)t}dt}_{2\pi\delta(\omega'-\omega)} = F(\omega)$$

Komplex Fourier transzformáció tulajdonságai

- A Fourier transzformáció lineáris:
  Tételezzük fel, hogy létezik $f(t)$ és $g(t)$ Fourier transzformáltja: $f(\omega)$, $g(\omega)$. Ekkor

$$\mathcal{F}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha \mathcal{F}\left[f(t)\right] + \beta \mathcal{F}\left[g(t)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)\right] = \alpha \mathcal{F}^{-1}\left[f(\omega)\right] + \beta \mathcal{F}^{-1}\left[g(\omega)\right]$$

- $\mathcal{F}\left[f(t+\tau)\right] = e^{i\tau\omega}\mathcal{F}\left[f(t)\right] = e^{i\tau\omega}F(\omega)$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)e^{-i\omega t}dt = e^{i\omega\tau}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'}dt'}_{F(\omega)},$$

  ahol $t' = t + \tau$.

- Derivált függvény Fourier transzformáltja:
  Tételezzük fel, hogy az $f(t)$ deriválható és létezik a Fourier transzformáltja: $\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega)$.

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right] = i\omega\mathcal{F}\left[f(t)\right] = i\omega F(\omega)$$

Fourier transzformáció tulajdonságai

- $\mathcal{F}\left[f'(t)\right] = i\omega\mathcal{F}\left[f(t)\right] = i\omega F(\omega)$
  A bizonyításhoz végezzünk el egy parciális integrálást:
  $$\mathcal{F}\left[f'(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = \boxed{\frac{1}{2\pi} f(t)e^{i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}} + \frac{1}{2\pi}i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega F(\omega)$$
  A keretben lévő kifejezés, ha létezik a Fourier transzformált, általában eltünik. Vannak kivételek!
- Primitív függvény Fourier transzformáltja
  $$\mathcal{F}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$
  Legyen $\mathbb{F}(t)$ az $f(t)$ függvény primitív függvénye:
  $$\mathcal{F}\left[F(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{F}(t)e^{-i\omega t}dt = \boxed{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\omega}\mathbb{F}(t)e^{i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$
  $$= \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$
  Az előzőekhez hasonlóan egy jól viselkedő függvény esetében eltünik a bekeretezett tag, ha ez nem teljesül, akkor alaposabban meg kell vizsgálni a kifejezést.

Fourier transzformáció tulajdonságai

- Időtükrözés:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) \ , \quad \mathcal{F}\left[f(-t)\right] = F(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[f(-t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-i\omega t}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} f(-t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = F$$

- Paritás:
  Páros függvények:

$$f(t) = f(-t) \ \Rightarrow \ F(\omega) = F(-\omega)$$

  Páratlan függvények:

$$f(t) = -f(-t) \ \Rightarrow \ F(\omega) = -F(-\omega)$$

  Páros függvénynek páros, páratlan függvénynek páratlan a Fourier transzformáltja.

Néhány Fourier transzformált

- Dirac delta Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}$$

- Konstans függvény $f(t) = a$ Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[a\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ae^{-i\omega t}dt = a\delta(\omega)$$

- Lépésfüggvény Fourier transzformáltja:
  Tudjuk, hogy a lépésfüggvény a Dirac delta primitív függvénye, használjuk a primitív függvényre vonatkozó szabályt:

$$\mathcal{F}\left[\Theta(t)\right] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] + g(\omega) = \frac{1}{2\pi i\omega} + g(\omega)$$

  A lépésfüggvény nem tűnik el $t \to \infty$-ben, ezért marad valamilyen $g(\omega)$ a parciális integrálás során.

Néhány Fourier transzformált

- Lépésfüggvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[\Theta(t)\right] = \frac{1}{2\pi i\omega} + g(\omega)$$

A lépésfüggvény definíciójából következően:$\Theta(-t) + \Theta(t) = 1$. Fourier transzformáljuk mindkét oldalt:

$$\mathcal{F}\left[\Theta(-t)\right] + \mathcal{F}\left[\Theta(t)\right] = \frac{-1}{2\pi i\omega} + g(\omega) + \frac{1}{2\pi i\omega} + g(\omega) = \delta(\omega)$$

A $g(\omega)$ függvényt pársonak várjuk el:

$$2g(\omega) = \delta(\omega)$$

Tehát a lépésfüggvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[\Theta(t)\right] = \frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega)$$

Néhány Fourier transzformált

- Szignum (előjel) függvény Fourier transzformáltja:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ha} \quad t < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t = 0 \\ 1 & \text{ha} \quad t > 0 \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} -e^{at} & \text{ha} \quad t < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t = 0 \\ e^{-at} & \text{ha} \quad t > 0 \end{cases}$$

Egyszerűen meggyőződhetümk róla, hogy ha $a \to 0$ akkor $g(t) = \text{sgn}(t)$.

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\lim_{a\to 0}\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{i\pi\omega}$$

Másrészt a szignum függvény előállítható a lépés függvénnyel is: $\text{sgn}(t) = 2\left(\Theta(t) - \frac{1}{2}\right)$. Tehát

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = 2\left(\mathcal{F}[\Theta(t)] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right]\right) = 2\left(\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{2}\delta(\omega)\right) = \frac{1}{i\pi\omega}$$

Néhány Fourier transzformált

- Haranggörbe Fourier transzformáltja:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$$

Használjuk fel a következő összefüggest:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+z)^2} dx = \sqrt{\pi} \,, \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t\right)} dt$$

Alakítsuk teljes négyzetté az exponenst:

$$\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2\tau^2}{4} \text{ és legyen } x = \frac{t}{\tau}$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2} e^{\frac{\omega^2\tau^2}{4}} \tau dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tau e^{\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$

Haranggörbének haranggörbe a Fourier transzformáltja. A haranggörbe szélességét τ határozza meg: mennél nagyobb τ, annál szélesebb a görbe. A Fourier transzformáltja fordítva viselkedik: mennél nagyobb τ, annál keskenyebb a Fourier transzformált.