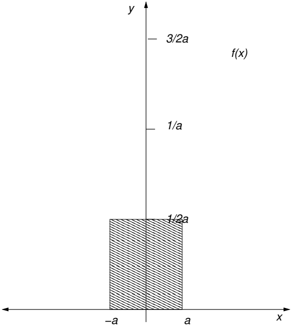
Dirac delta

2022. február 13.

Dirac delta

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha} \quad |x| \leq a \end{cases}$$



A függvény integrálja az ábrán látható téglalp területével egyezik meg, amely a tetszőleges értéke mellett egységnyi lesz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1$. Ha a értéke közelít nullához, akkor a függvény nyilvánvalóan végtelenhez tart, de az integrálja ebben az esetben is egy lesz:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1 \; .$$

Nézzük meg, hogy mi lesz a következő integrál értéke:

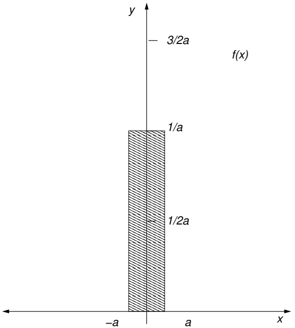
$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

ahol $g(x)$-ről feltételezzük, hogy folytonos függvény.

Dirac delta

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha} \quad |x| \leq a \end{cases}$$



A függvény integrálja az ábrán látható téglalap területével egyezik meg, amely a tetszőleges értéke mellett egységnyi lesz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1$. Ha a értéke közelít nullához, akkor a függvény nyilvánvalóan végtelenhez tart, de az integrálja ebben az esetben is egy lesz:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1 \ .$$

Nézzük meg, hogy mi lesz a következő integrál értéke:

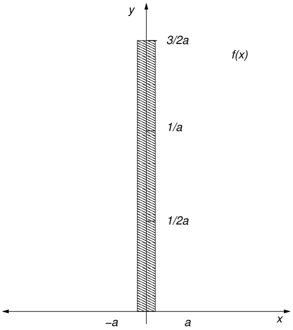
$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

ahol $g(x)$-ről feltételezzük, hogy folytonos függvény.

Dirac delta

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha} \quad |x| \le a \end{cases}$$



A függvény integrálja az ábrán látható téglalp területével egyezik meg, amely a tetszőleges értéke mellett egységnyi lesz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1$. Ha a értéke közelít nullához, akkor a függvény nyilvánvalóan végtelenhez tart, de az integrálja ebben az esetben is egy lesz:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1 \ .$$

Nézzük meg, hogy mi lesz a következő integrál értéke:

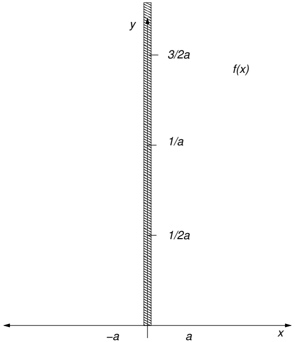
$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

ahol $g(x)$-ről feltételezzük, hogy folytonos függvény.

Dirac delta

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha} \quad |x| \le a \end{cases}$$



A függvény integrálja az ábrán látható téglalp területével egyezik meg, amely a tetszőleges értéke mellett egységnyi lesz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1$. Ha a értéke közelít nullához, akkor a függvény nyilvánvalóan végtelenhez tart, de az integrálja ebben az esetben is egy lesz:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1 \ .$$

Nézzük meg, hogy mi lesz a következő integrál értéke:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

ahol $g(x)$-ről feltételezzük, hogy folytonos függvény.

Dirac delta

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

Az integrál becsléséhez használjuk az integrál középérték tételt: vagyis létezik az $(-a,a)$ intervallumon egy x_0 amelyre teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x,a)g(x)dx = 2ag(x_0)f(x_0,a) = g(x_0)\ , \quad x_0 \in (-a,a).$$

Ha a értékével nullához tartunk, akkor nyilván

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = g(0)$$

Azt mondjuk, hogy a $\lim_{a\to 0} f(x,a)$ határérték az u.n. Dirac delta egy előállítását adja:

$$\lim_{a\to 0} f(x,a) = \delta(x)\ .$$

A Dirac delta disztribúciót az integrálján keresztül értelmezhetjük:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta(x-x_0)dx = g(x_0)\ ,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsiny valós szám.

A Dirac delta néhány tulajdonsága

A Dirac delta definíciójából következik, hogy

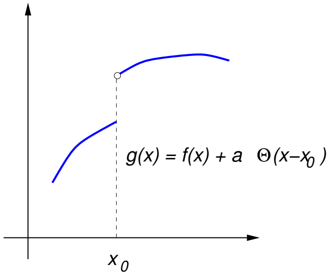
$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx = 1 \ .$$

Mi a Dirac delta primitív függvénye?

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x \geq 0 \ , \end{cases}$$

vagyis a $\Theta(x)$ lépésfüggvény deriváltja egy Dirac delta. Ha szakadás van egy függvényben, a deriváltjában a szakadás helyén egy Dirac delta lesz:

$$f(x) = g(x) + a\Theta(x-x_0) \ , \qquad f'(x) = f'(x) + a\delta(x-x_0)$$



A Dirac delta néhány tulajdonsága

Nézzük meg a következő integrált:

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx =$$

Alkalmazzuk az $z = g(x)$ helyettesítést, ekkor $dx = \dfrac{dz}{|g'(x)|}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\delta(z)}{|g'(x)|}dz$$

A Dirac delta kicsippenti azokat az értékeket, ahol az argumentuma nulla lesz, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \ ,$$

ahol x_i a $g(x)$ függvény zérushelyeit jelöli.

A Dirac delta néhány tulajdonsága

Nézzük meg a következő példát:

$$\int_0^\infty e^{-x}\delta(\sin(x))dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi}}{|\cos(n\pi)|} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}} ,$$

ahol kihasználtuk, hogy a $\sin(x)$ függvénynek $n\pi$ a zérushelyei és $|\cos(n\pi)| = 1$, valamint felhasználtuk a geometriai sorra vonatkozó összegszabályt.

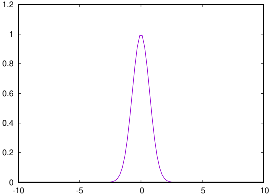
Értelmezhetjük a Dirac delta deriváltját is, egy parciális integrál seg1tségével:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta'(x-x_0)dx = g(x_0+\varepsilon)\delta(\varepsilon) - g(x-\varepsilon)\delta(-\varepsilon) - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g'(x)\delta(x-x_0)$$

A fenti egyenletben $\delta(\varepsilon)$ és $\delta(-\varepsilon)$ eltünik, hiszen a Dirac delta csak a nullánál különbözik nullától, így

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta'(x-x_0)dx = -\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g'(x)\delta(x-x_0) = -g'(x_0) .$$

A Dirac delta más előállításai

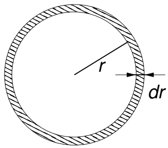


Gauss integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I$$

Számítsuk ki az integrál négyzetét:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$



Végezzük el a kétdimenziós integrált a teljes síkon, használjunk polár koordináta rendszert. Egy r sugarú, dr szélességű gyűrű területe $2\pi r dr$.

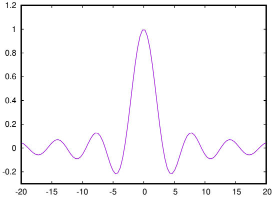
$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

Tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

A Dirac delta más előállításai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = I$$



Az inproprius integrál meghatározásához vezessük be a köbvetkező függvényt:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \frac{\sin(x)}{x} dx \; .$$

Nyilvánvalóan $F(0)$ visszaadja a keresett integrál felét, $F(s)$ értéke pedig a végtelenben nulla kell, hogy legyen. Deriváljuk az előző egyenletet:

$$F'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \sin(x) dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-(s-i)x} - e^{-(s+i)x} \right) dx = -\frac{1}{1+s^2}$$

Vagyis a következő differenciál egyenlethez jutottunk, amelyet az $F(\infty) = 0$ feltétellel kell megoldanunk: $F'(s) = -\dfrac{1}{1+s^2}$. Az egyenlet megoldása integrálás után:

$$F(s) = -\text{arctg}(s) + C \; .$$

Az arctg(s) függvény a végtelenben $\pi/2$, tehát a megoldás $F(s) = -\text{arctg}(s) + \pi/2$ és $F(0) = \pi/2$, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi \; .$$

A Dirac delta más előállításai

- Előállítás Gauss függvénnyel:
  A Gauss függvény integráljáról könnyen beláthatjuk, hogy egységnyi a tetszőleges választása esetén:
  $$\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = 1 \ .$$
  Ha csökkentjük az a paraméter értékét, akkor a haranggörbe egyre keskenyebb lesz, de a magassága egyre nő. Ha a-val tartunk nullához, akkor a Dirac delta egy másik előállításához jutunk:
  $$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \delta(x) \ .$$
- $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(ax)}{x}$
  A függvény integrálja a teljes valós tengelyen egy lesz, függetlenül a értékétől. A függvény a maximumát az $x = 0$ helyen veszi fel és attól távolódva rohamosan csökken az értéke. Az első zárus helye az π/a helyen lesz. Ha az a paraméterrel tartunk a végtelen felé, akkor a zérushelyek egyre közelebb kerülnek és a függvény maximuma egyre nagyobb lesz, tartunk a Dirac deltához:
  $$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(ax)}{x} = \delta(x) \ .$$

A Dirac delta más előállításai

Tudjuk, hogy

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ax)}{x} = \delta(x) \; .$$

Számítsuk ki a következő integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{i(k-k')} \left(e^{i(k-k')x} - e^{-i(k-k')x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2i \sin((k-k')x)}{i(k-k')}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k')$$

Green függvény

Mi köze a Dirac deltának a differenciálegyenletekhez?

Tekintsük a következő másodrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenletet:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = f(x)$$

Hogyan határozhatnánk meg egy partikuláris megoldását? Keressük meg a $G(x, x')$ függvényt, amely kielégíti a következő differenciál egyenletet rögzített x' mellett:

$$\frac{d^2G(x, x'}{dx^2} + a(x)\frac{dG(x, x')}{dx} + b(x)G(x, x') = \delta(x - x')$$

ekkor egy partikuláris megoldás előállítható a következő integrállal:

$$y_p(x) = \int_0^\infty G(x, x')f(x')dx'$$

Helyettesítsük be az inhomogén egyenletbe:

$$\int_0^\infty \frac{d^2G(x, x')}{dx^2}f(x')dx' + \int_0^\infty a(x)\frac{d^G(x, x')}{dx}f(x')dx' + \int_0^\infty b(x)G(x, x')f(x')dx'$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{d^2G(x, x'}{dx^2} + a(x)\frac{dG(x, x')}{dx} + b(x)G(x, x')\right)}_{\delta(x-x')} f(x')dx' = \int_0^\infty \delta(x - x')f(x')dx' = f(x)$$