Közönséges differenciál egyenletek

A differenciálegyenletek a fizika szinte minden területén előfordulnak. Tanulmányaink során valószínüleg az első differenciál egyenlet, amellyel találkoztunk a Newton egyenlet volt, még ha nem is neveztük nevén a gyereket:

$$ma = F \ .$$

A gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja, az erő pedig függhet a helytől:

$$m\ddot{x} = F(x) \ .$$

Ennek az egyenletnek a megoldása a hely az idő függvényében. Ha nem szorítkozunk csak egy dimenzióra, akkor három differenciál egyenletből álló rendszert kapunk, amely megoldása a tömegpont időfüggő pályája. A fenti egyenletben nem szerepelnek parciális deriváltak és a legmagasabb derivált a hely második deriváltja, ezért közönséges, másodrendű differenciálegyenletnek nevezzük.

1. A közönséges differenciál egyenletek osztályozása

Általánosságban a következőképpen írhatunk fel egy n-ed rendű, közönséges differenciál egyenletet:

$$\begin{aligned} F\left(x, y, y', \cdots y^{(n-1)}\right) &= y^{(n)} \quad \text{explicit} \\ F\left(x, y, y', \cdots y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) &= 0 \quad \text{implicit} \end{aligned}$$

A tulajdonságaik alapján tovább osztább osztályozhatjuk a differenciálegyenleteket. Lineárisnak mondjuk a problémát, ha a következő alakban írhatjuk fel:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + r(x) \ . \tag{1}$$

Ha a fenti egyenletben $r(x) = 0$, akkor a differenciálegyenletet homogénnek nevezzük:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} \ . \tag{2}$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldásai a homogén, lineáris differenciál egyenletnek, akkor azok $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ lineáris kombinációi is kielégítik azt, ahol α, β két tetszőleges valós vagy komplex szám.

y_1 és y_2 is kielégíti a 2 számú egyenletet:

$$y_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)}, \qquad\qquad y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_2^{(i)} \ .$$

Helyettesítsük be a két megoldás lineáris kombinációját a differenciál egyenletbe:

$$\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \left(\alpha y_1^{(i)} + \beta y_2^{(i)}\right) = \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)}}_{y_1^{(n)}} + \beta \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_2^{(i)}}_{y_2^{(n)}}$$

Ha az $y_0(x)$ függvény kielégíti a 2 számú homogén egyenletet, az $y_1(x)$ pedig megoldása az 1-es inhomogén egyenletnek, akkor az $y = \alpha y_0(x) + y_1(x)$ függvény is megoldása az inhomogén egyenletnek.

$$\boxed{\alpha y_0^{(n)} + y_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\left(\alpha y_0^{(i)} + y_1^{(i)}\right) + r(x) = \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_0^{(i)}}_{y_0^{(n)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)} + r(x)}_{y_1^{(n)}}}$$

2. Homogén közönséges differenciálegyenletek

2.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha az elsőrendű differenciálegyenletet az $y' = f(x)g(y)$ alakban tudjuk felírni, akkor szétválasztható változójú differenciálegyenletről beszélünk. Tételezzük fel, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak azon az intervallumon, ahol a megoldást keressük és $g(y) \neq 0$ ezen a tartományon. Az $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ egyenletet átírhatjuk a vele ekvivalens

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{3}$$

egyenletre, amelynek az általános megoldása

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \ , \tag{4}$$

ahol C egy tetszőleges valós szám. Legyenek a primitív függvények

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad\qquad F(x) = \int f(x)dx \ . \tag{5}$$

Ekkor a megoldásra a következő implicit egyenletet kapjuk:

$$G(y) = F(x) + C \tag{6}$$

Nézzünk a módszer néhány egyszerű alkalmazását:

a.

Vizsgáljunk egy folyadékban mozgó testet, amelyre csak a sebességgel arányos súrlódási erő hat. A Newton egyenlet a következő alakú lesz: $ma = -\alpha v$, ahol a a test gyorsulása, v pedig a sebessége. A gyorsulást kifejezhetjük a sebesség idő szerinte deriváltjával: $m\dot{v} = -\alpha v$, kicsit átrendezve: $\dot{v} = -\frac{\alpha}{m}v$. Alkalmazzuk az előbb tanult módszert:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}\int t - \ln(C) \ . \tag{7}$$

Az integrálásokat elvégezve:

$$ln(v) = -\frac{\alpha}{m}t - \ln(C) \ , \tag{8}$$

ahonnan egyszerűen kifejezhetjük a $v(t)$ függvényt:

$$v = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t} \ . \tag{9}$$

Az $y' = \alpha y$ egyenletet, amelynek a megoldása az előzőek szerint $y = Ce^{\alpha t}$, elsőrendű, állandóegyütthatós differenciálegyenletnek nevezzük.

b.

Második példaként vizsgáljuk meg a harmonikus rezgőmozgást. Egy egyik végén rögzített rugó másik végén egy m tömegű test mozog vízszintesen surlódás nélkül. A Newton egyenlet a következő alakú lesz: $ma = -kx$, ahol k rugóállandó. A rugóerő, köztudomásúlag, arányos a rugó megnyúlásával. Az a gyorsulást írjuk fel úgy, mint a hely idő szerinti második deriváltját. Ekkor a $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$, egyenletet kapjuk, amely egy másodrendű differenciálegyenlet. A változók szétválasztásának a módszerét csak első rendű differenciálegyenletekre alkalmazhatjuk, ezért más utat kell választanunk a megoldáshoz. Írjuk fel a rendszer energiáját:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \tag{10}$$

Fejezzük ki a sebességet az energiából:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)} \tag{11}$$

Ez már egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelyet meg tudunk oldani. Mielőtt neki kezdenénk az integrálásnak, csinosítsuk egy kicsit a kifejezést:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2} \, . \tag{12}$$

Írjuk fel az integrálokat:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} = \int dt + C \tag{13}$$

Vezessük be az új, $y = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$ változót, ekkor $dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}dy$:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{1-y^2}}dy = \sqrt{\frac{m}{k}}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dt + C \tag{14}$$

Végezzük el az integrálokat (Wolfram alpha):

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin(y) = t + C \, , \tag{15}$$

helyettesítsük vissza x-et:

$$\arcsin(\sqrt{\frac{k}{2E}}x) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi \, , \tag{16}$$

ahol φ egy, a kezdeti feltételek által meghatározott konstans. Vezessük be az $\omega^2 = \frac{k}{m}$ körfrekvenciát és fejezzük ki az x elmozdulást:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\omega t + \varphi) \tag{17}$$

Keressük meg az $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ jelentését! Amikor a rugó megnyúlása a legnagyobb, a test sebessége éppen nullával egyenlő, vagyis a teljes energia megegyezik a rugó potenciális energiájával:

$E = \dfrac{k}{2}A^2$, ahol A a mozgás amplitúdója. Az amplitúdó tehát $A = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$, így a 17 számú egyenletben a megoldás a szokásos

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \tag{18}$$

alakban adódik.

Ha a 4 számú egyenletben a $g(x)$ függvényt egy álandóval helyettesíjük, akkor a szétválasztható változójú differenciálegyenletek egy speciális csoportját kapjuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y\ . \tag{19}$$

Az előzőekhez hasonlóan oldjuk meg a differenciálegyenletet:

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx + C \tag{20}$$

$$\ln(y) = \int f(x)dx + C \tag{21}$$

Vagyis az egyenlet megoldását $y(x) = e^{\int_0^x f(x')dx'}$ alakban kapjuk.

Az előző első rendű közönséges differenciál egyenletet kiegészíthetjük egy inhomogén taggal:

$$y' + p(x)y = q(x)\ .$$

A megoldáshoz mindkét oldalt szorozzuk be egy $u(x)$ függvénnyel:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)q(x)\ .$$

A bal oldalt egy teljes deriválttá alakíthatjuk, ha az $u(x)$ függvény kielégíti a következő feltételt: $u(x)p(x) = u'(x)$. Ez maga is egy differenciál egyenlet, melynek a megoldása:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}\ .$$

ekkor

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)y' + u'(x)y = \frac{d(uy)}{dx} = u(x)q(x).$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$uy = \int u(x)q(x)dx + C;,$$

ahol C egy integrálási konstanas, szabad paraméter a kezdő feltételek teljesítéséhez. Tehát a k.d.e. megoldása:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)}\ .$$