Fourier transzformáció

2021. március 2.

Fourier transzformáció

Fourier transzformáció

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Inverz Fourier transzformáció

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Alternatív definíció:

Fourier transzformáció

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Inverz Fourier transzformáció

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f(\omega)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Fourier transzformáció tulajdonságai

- A Fourier transzformáció lineáris:

$$\mathcal{F}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha \mathcal{F}\left[f(t)\right] + \beta \mathcal{F}\left[g(t)\right]$$

- Függvény eltoltjának transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[f(t+\tau)\right] = e^{i\omega\tau} \mathcal{F}\left[f(t)\right]$$

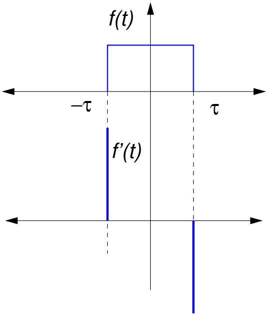
- Derivált függvény transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right] = i\omega \mathcal{F}\left[f(t)\right]$$

- Primitív függvény transzformáltja: $F(t) = \int f(t) dt$,

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right] = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}\left[f(t)\right]$$

Példák Fourier transzformáltakra

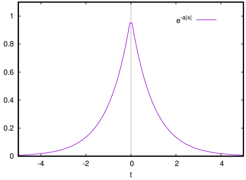


$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < -\tau \\ 1 & \text{ha} \quad |t| \leq \tau \\ 0 & \text{ha} \quad t > \tau \end{cases}$$

$$f'(t) = \delta(t+\tau) - \delta(t-\tau)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[f'(t)\right] &= i\omega\mathcal{F}\left[f(t)\right] = i\omega\left(\mathcal{F}\left[\delta(t+\tau)\right] - \mathcal{F}\left[\delta(t-\tau)\right]\right) \\ &= i\omega\left(e^{i\omega\tau}\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] - e^{-i\omega\tau}\mathcal{F}\left[\delta(t)\right]\right) \\ &= \frac{i\omega}{2\pi}\left(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}\right) = -\frac{\omega}{\pi}\sin(\omega\tau) \\ i\omega\mathcal{F}\left[f(t)\right] &= -\frac{\omega}{\pi}\sin(\omega\tau) \\ \mathcal{F}\left[f(t)\right] &= \frac{i}{\pi}\sin(\omega\tau) \end{aligned}$$

Példák Fourier transzformáltakra



$$f(t) = e^{\alpha|t|}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f(t)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|t|}e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

A Fourier transzformáltja a Lorentz görbe vagy Cauchy eloszlás.

Néhány további tulajdonság

Tételezzük fel, hogy a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[tf(t)\right]} = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\frac{d}{d\omega}\left(f(t)e^{i\omega t}\right)dt$$

$$= i\frac{d}{d\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \boxed{i\frac{d}{d\omega}F(\omega)}$$

A fenti összefüggés többszöri alkalmazásával könnyen belátható:

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right] = i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}\left[f(t)\right] = i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$$

Az előzőekhez hasonlóan:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}f(t)\right]} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\int\left(f(t)e^{-i\omega t}\right)d\omega dt$$

$$= i\int\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega = i\int\mathcal{F}\left[f(t)\right]d\omega = \boxed{i\int F(\omega)d\omega}$$

Differenciál egyenletek Fourier képben:

Bizonyos esetekben egyszerűbb lehet a differenciálegyenletet Fourier transzformáltját meghatározni. Tekintsük a következő egyenletet:

$$\ddot{y} + ty = 0$$

A megoldések: $Ai(t)$, $Bi(t)$ speciális u.n. Airy függvények. Írjuk fel a differenciálegyenletet az $y(t)$ függvény Fourier transzformáltjára:

$$-\omega^2 Y(\omega) + i\frac{dY(\omega)}{d\omega} = 0 \; ,$$

amely egy egyszerű szétválasztható változójú diff.egyenlet:

$$Y(\omega) = Ce^{-i\frac{\omega^3}{3}}$$

Szorzat függvény Fourier transzformáltja

Legyen $F(\omega)$ és $G(\omega)$ az $f(t)$, $g(t)$ függvények fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[f(t)g(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}dt \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega')e^{i\omega' t}}_{f(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' G(\omega'')e^{i\omega'' t}}_{g(t)} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' G(\omega'') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega'+\omega''-\omega)t}dt}_{2\pi\delta(\omega-\omega'-\omega'')} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega-\omega')d\omega'$$

Konvolúció

A $F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega-\omega')d\omega'$ műveletet $F(\omega)$ és $G(\omega)$ konvolúciójának nevezzük. $\mathcal{F}\left[f(t)g(t)\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\right] * \mathcal{F}\left[g(t)\right]$.

Konvolúció Fourier transzformáltja

Legyen $F(\omega)$ és $G(\omega)$ az $f(t)$, $g(t)$ függvények fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}\left[f(t) * g(t)\right] = 2\pi \mathcal{F}\left[f(t)\right] \mathcal{F}\left[g(t)\right] = 2\pi F(\omega) G(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)G(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'} dt'}_{F(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t'')e^{-i\omega t''} dt''}_{G(\omega)} \right) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t'') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t'-t'')} d\omega}_{2\pi\delta(t'+t''-t)} dt' dt'' = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'}$$

Állandóegyütthatós másodrendű k.d.e. Green függvénye

Állandóegyütthatós másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$$

Green függvény valós térben:

$$\ddot{G} + a\dot{G} + bG = \delta(t)$$
$$G(t-t') = y_h(t-t')\Theta(t-t')$$
$$y_h(0) = 0\ , \quad \dot{y}(0) = 1$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')dt'}$$

Green függvény Fourier térben:

$$-\omega^2 G(\omega) + i\omega a G(\omega) + bG(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$
$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-\omega^2 + ia\omega + b}$$

$$\boxed{Y(\omega) = 2\pi G(\omega)F(\omega)}$$