Első rendű lineáris, közönséges differenciálegyenletek Green függvénye

Tekintsünk egy általános első rendű, inhomogén lineáris, közönséges differenciálegyenletet:

$$\dot{y} + p(t)y = q(t) \ .$$

Azt a függvényt, amely kielégíti a differenciálegyenletet, de nem feltétlenül tesz eleget a kezdő feltételnek, partikuláris megoldásnak nevezzük.A partikuláris megoldás megkeresésének egy lehetséges módja a Green függvény alkalmazása.

A Green függvény a nevét az angol matematikus/fizikus George Green neve után kapta. Eredetileg a Maxwell egyenletekben fellépő parciális differenciál egyenletek megoldását tanulmányozta, de az általa kidolgozott módszer általánosan elterjedt a differenciálegyenletek megoldása során és a fizika számos területén felbukkan. Green eredetileg műkedvelő matematikus volt, – eredeti foglalkozását tekintve malom tulajdonos, – de munkássága mindenképp a legnagyobb matematikusok kőzé emeli.

A Green család szélmalma Sneintonban

Keressük azt a kétváltozós $G(t, t')$ függvényt, amely kielégíti a következő egyenletet azzal a feltétellel, hogy $G(a, t') = 0$ egy adott a valós szám esetén.

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + p(t)G(t, t') = \delta(t - t') \ .$$

Amennyiben ismerjük a fenti függvényt, akkor egy partikuláris megoldást a következőképpen adhatunk meg:

$$y_p(t) = \int_a^\infty G(t, t')q(t')dt' \qquad (1)$$

A prem feltételből adódóan $y_p(a) = 0$, amelynek az a jelentése, hogy a $q(t)$ inhomogén tagot egy véges időben kapcsoljuk be, előtte pedig nulla volt. Ez a feltétel nem jelent problémát a konkrét megoldás esetén , hiszen a kezdeti feltételt kielégítő megoldást a partikulárs megoldás és a homogén megoldás lineáris kombinációjaként keressük:

$$y(t) = \alpha y_h(t) + y_p(t) \ .$$

Az 1 számú egyenlettel megadott partikuláris megoldást behelyettesítve a differenciálegyenletbe meggyőződhetünk róla, hogy az kielégiti az inhomogén egyenletet. Tegyük fel, hogy az integrálás és a differenciálás sorrendjének felcseréléséhez minden feltétel teljesül:

$$\int_a^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + +p(t)G(t, t') \right) f(t')dt' = \int_a^\infty \delta(t - t')f(t')dt' = f(t) \ .$$

Hogyan kereshetjük meg a Green függvényt? Ha $t < t'$ akkor

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + p(t)G(t, t') = 0 \ ,$$

vagyis a Green függvénynek arányosnak kell lennie a homogén megoldással: $G(t,t') = c_1 y_h(t)$. Ugyen igaz akkor is, ha $t > t'$, $G(t,t') = c_2 y_h(t)$. Nézzük meg, hogy mi történik, ha $t = t'$! Integráljuk a differenciálegyenletet t' körül egy kicsiny ε tartományon:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}G(t,t')dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} p(t)G(t,t')dt = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t')dt = 1$$

Az egyenlet jobb oldala egységnyi, hiszen a Dirac delta integrálja bármilyen kicsiny intervallumon, amely az argumentuma zérushelyét tartalmazza egy. Tételezzük fel hogy $p(t)$ és $G(t,t')$ korlátos. Ebben az esetben a baloldal második tagja eltünik, ha ε-nal tartunk nullához.

$$G(t'+,t') - G(t'-,t') = 1 \ ,$$

vagyis a Green függvénynek ugrása van, ha $t = t'$. A perem feltétel szerint, $G(a,t') = 0$, amely csak akkor teljesülhet, ha a c_1 állandót nullának választjuk. A Green függvény ugrása $t = t'$-ben akkor teljesülhet, ha a c_2 állandót úgy választjuk meg, hogy $G(t',t') = 1$:

$$G(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \le t < t' \\ c_2 y_h(t) & \text{ha} \quad t > t' \end{cases}$$

A homogén egyenlet megoldása $y_h(t) = e^{\int p(t)dt}$. Egyszerűen meggyőződhetünk, hogy a

$$\boxed{G(t,t') = e^{-\int_{t'}^{t} p(x)dx}\Theta(t-t')} \tag{2}$$

függvény kielégíti a kirótt feltételeket.

Korábban megtanultok, hogy hogyan kell megoldani egy általános, elsőrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenletet megoldani:

$$\begin{aligned} &\dot{y} + p(t)y = q(t), && u(t) = e^{\int p(t)dt} \\ &y(t) = \frac{1}{u(t)}\int u(t')q(t')dt' + C\frac{1}{u(t)} \ , \end{aligned} \tag{3}$$

ahol C a szaban dparaméter a kezdőfeltétel teljesítéséhez. Legyen $P(t) = \int p(t)dt$, a $p(t)$ függvény primitív függvénye. Ekkor a 3 megoldást a követkeyőképpen írhatjuk fel:

$$y(t) = e^{-P(t)}\int_a^t e^{P(t')}q(t')dt' + Ce^{-P(t)} \ . \tag{4}$$

Nyilvánvalóan $y_h(t) = e^{-P(t)}$ a differenciálegyenlet homogén megoldása. Vizsgáljuk meg, hogy mire vezet, ha a 2. egenletben megadott Green függvénnyel előállítjuk a partikuláris megoldást:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_a^{\infty} G(t,t')q(t')dt' = \int_a^{\infty} e^{-\int_{t'}^{t} p(x)dx}\Theta(t-t')q(t')dt' = \int_a^t e^{-\int_{t'}^{t} p(x)dx}q(t')dt' \\ &= \int_a^t e^{-P(t)+P(t')}q(t')dt' = e^{-P(t)}\int_a^t e^{P(t')}q(t')dt' \ , \end{aligned}$$

amely megegyezik a 4. számú egyenlet partikuláris megoldásával.