Másod rendű lineáris, állandóegyütthatós közönséges differenciálegyenletek Green függvénye

Tekintsük először az állandóegyütthatós esetet:

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t) \; .$$

Ebben az esetben könnyen beláthatjuk, hogy ha az $y(t)$ függvény kielégíti a differenciálegyenletet, akkor egy t_0-lal eltolt függvéy is kielégíti azt:

$$\ddot{y}(t+t_0) + a\dot{y}(t+t_0) + by(t+t_0) = f(t+t_0) \; .$$

Általános esetben az a, b paraméterek időfüggése miatt ez nem teljesül. Kerssük a következő differenciálegyenlet megoldását:

$$\ddot{g} + a\dot{g} + bg = \delta(t) \; .$$

Nyilvánvalóan a $y_h(t)$ homogén megoldás kielégíti az egyenletet. ha $t \neq 0$. Keressük a megoldást $g(t) = y_h(t)\Theta(t)$ alakban, ahol $\Theta(t)$ a lépésfüggvény és helyettesítsük be a differenciál egyenletbe! Ehhez előbb számítsuk ki $g(t)$ az első és második deriváltját figyelembe véve azt, hogy a lépésfüggvény deriváltja Dirac delta lesz.

$$\frac{d}{dt}y_h(t)\Theta(t) = \dot{y}_h\Theta(t) + y_h(0)\delta(t)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}y_h(t)\Theta(t) = \ddot{y}_h\Theta(t) + \dot{y}_h(0)\delta(t) + y_h(0)\delta(t)' \; ,$$

ahol $\delta(t)'$ a Dirac delta deriváltja. Helyettesítsük be a deriváltakat a differenciálegyenletbe:

$$\ddot{y}_h\Theta(t) + \dot{y}_h(0)\delta(t) + y_h(0)\delta(t)' + a\dot{y}_h\Theta(t) + ay_h(0)\delta(t) + y_h(t)\Theta(t) = \delta(t) \; .$$

Gyűjtsük össze a lépésfüggvényt tartalmazó tagokat:

$$(\ddot{y}_h + a\dot{y}_h + by_h)\,\theta(t) + \dot{y}_h(0)\delta(t) + y_h(0)\delta(t)' + ay_h(0)\delta(t) = \delta(t)$$

Az első tag nyilván eltünik, mivel $y_h(t)$ kielégíti a homogén diffeenciálegyenletet. A Dirac delta deriváltját tartalmazó tagnak is el kell tünnie, hiszen a jobb oldalon csak $\delta(t)$ szerepel, ezért az egyik határfeltétal $y_h(0) = 0$ kell, hogy legyen. Ha a másik határfeltételnek $y_h(0) = 1$ feltételt választjuk, akkor ki tudjuk elégíteni a differenciálegyenletünket! A Green függvény $G(t,t') = g(t-t')$ alakú lesz, ahol $g(t) = y_h(t)\Theta(t)$ és a homgén egyenelt kielégíti a $y_h(0) = 0$ és $\dot{y}_h(0) = 1$ határfeltételeket.

$$\boxed{G(t,t') = y_h(t-t')\Theta(t-t') \qquad y_h(0) = 0 \; , \quad \dot{y}_h(0) = 1}$$

Nézzünk meg egy egyszerű példát! Legyen a differenciálegyenlet a következő alakú:

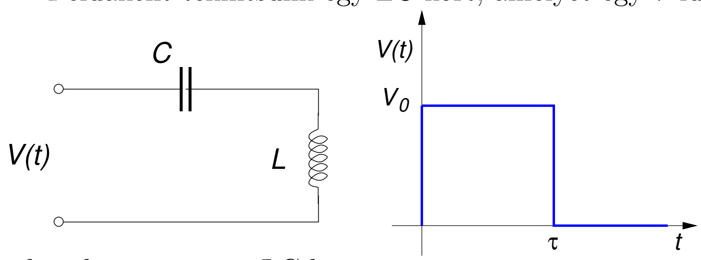
$$\ddot{y} + \omega^2 y = f(t)$$

A homogén megoldások: $y_{h1}(t) = A\cos(\omega t)$ és $y_{h2}(t) = B\sin(\omega t)$. A homogén megoldásna nullában el kell tünnie, ezért csak a $\sin(\omega t)$-t tartalmazó tag jöhet számításba. A deriváltjának a

nulla helyen egységnyinek kell lennie, így a határfeltétalekt kielégítő megoldás $y_h(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$.
A Green függvény tehát:

$$G(t,t') = \frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-t')\Theta(t-t'))$$

Példaként tekintsünk egy LC kört, amelyet egy τ ideig tartó négyszög jellel gerjesztünk:



$$V(t) = V_0\left(\Theta(t) - \Theta(t-\tau)\right)$$

Írjuk fel a hurok törvényt az LC körre:

$$V(t) - L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{t} \ .$$

Használjuk fel, hogy $I = \frac{dQ}{dt}$:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = V(t) \ , \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = \frac{V(t)}{L} \ .$$

Bevezetve az $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ jelölést, az előző differenciálegyenletet kapjuk vissza, amelynek már megszerkesztettük a Green függvényét. Egy partikuláris megoldást a következő integrállal tudunk előállítani:

$$Q_p(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')V(t')dt' = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-t')))\Theta(t-t'))V_0\left(\Theta(t') - \Theta(t'-\tau)\right)dt'$$

Az integrált két részre kell bontanunk. Az első esetben $t < \tau$:

$$Q_p(t) = \frac{V_0}{L\omega}\int_0^t \sin(\omega(t-t'))dt' = \frac{V_0}{L\omega^2}\cos(\omega(t-t'))\Big|_0^t = \frac{V_0}{L\omega^2}(1-\cos(\omega t))$$

A második esetben nincsen gerjesztés, ezért a megoldást a homogén megoldások lineáris kombinációjaként kereshetjük, csak a $t = \tau$ pillanatban illesztenünk kell a függvényt és a deriváltját:

$$Q_p(\tau) = A\cos(\omega\tau) + B\sin(\omega\tau)\$, \qquad \dot{Q}_p(\tau) = -A\omega\sin(\omega\tau) + B\omega\cos(\omega\tau)$$

$$Q_p(\tau) = \frac{V_0}{L\omega^2}(1-\cos(\omega\tau)) = A\cos(\omega\tau) + B\sin(\omega\tau)$$
$$\dot{Q}_p(\tau) = \frac{V_0}{L\omega}\sin(\omega\tau) = -A\omega\sin(\omega\tau) + B\omega\cos(\omega\tau)$$

A két ismeretlenes egyenlet megoldásai:

$$A = \frac{V_0}{L\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right) \ , \qquad B = \frac{V_0}{L\omega^2}$$

Másod rendű lineáris, közönséges differenciálegyenletek Green függvénye

Tekintsünk egy általános másod rendű, inhomogén lineáris, közönséges differenciálegyenletet:

$$\alpha(t)\ddot{y} + \beta(t)\dot{y} + \gamma(t)(t)y = f(t) \ .$$

Tételezzük fel, hogy az $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ függvények folytonosan deriválhatóak és korlátosakaz $[a, b]$ intervallumon. Keressük a differencálegyenlet Green függvényét homogén perem feltétel mellet: $G(a, t') = 0$ és $G(b, t') = 0$. Jelölje $y_1(t)$ és $y_2(t)$ azokat a homogén megoldásokat, amelyekre teljesül, hogy $y_1(a) = 0$ és $y_2(b) = 0$. A Green függvény megkonstruálásához hasonlóan járhatunk el, mint az első rendű esetben. Vizsgáljuk meg a Green függvényt $t < t'$ és $t > t'$ esetben. Mindkét esetben a homogén differenciálegyenletnek kell teljesülnie, hiszen a Dirac delta nulla, ha az argumentuma különbözik nullától. Ha az első feltétel teljesül, $t < t'$, akkor a Green függvény arányos kell, hogy legyen $y_1(t)$-vel. Ha $t > t'$, akkor a Green függvény arányos $y_2(t)$-vel:

$$G(t, t') = \begin{cases} y_1(t)A(t') & \text{ha} \quad t < t' \\ y_2(t)B(t') & \text{ha} \quad t > t' \end{cases} \ . \tag{1}$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedik a Green függvény, ha $t = t'$! Tételezzük fel, hogy a Green függvénynek ugrása van a $t = t'$ helyen. A lépés függvény deriváltja Dirac delta, a második deriváltja $\delta'(t - t')$, csakhogy a differenciálegyenlet jobb oldalán nem szerepel $\delta(t - t')$-nál bonyolultabb matematikai objektum! Ebből arra következtetünk, hogy a Green függvény folytonos a $t = t'$ helyen.

$$G(t'+, t') = G(t'-, t') \tag{2}$$

A Green függvény deriváltjának a viselkedését térképezzük fel úgy, hogy integráljuk a differenciálegyenletet t' körül egy infinitezimálisan kicsiny ε tartományon:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \alpha(t)\frac{d^2G(t, t')}{dt^2}dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \beta(t)\frac{dG(t, t')}{dt}dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \gamma(t)G(t, t')dt = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t - t')dt = 1 \tag{3}$$

Nézzük először az egyenlet bal oldalán szereplő harmadik tagot. Mind a Green függvény, mind $\gamma(t)$ korlátos, ezért ez a tag eltünik.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \gamma(t)G(t, t')dt = 0 \ .$$

A következő tag vizsgálatához végezzünk el egy parciális integrálást:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \beta(t)\frac{dG(t, t')}{dt}dt = \beta(t)G(t, t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{d\beta(t)}{dt}G(t, t')dt = 0.$$

Miután $\beta(t)$ deriváltja és $G(t, t')$ is folytonos, ez az integrál is eltünik a $\varepsilon \to 0$ határátmenetben. Az eslő tag tanulmányozásához végezzünk el itt is egy parciális integrálást:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \alpha(t)\frac{d^2G(t, t')}{dt^2}dt = \alpha(t)\frac{dG(t, t')}{dt}\Bigg|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{d\alpha(t)}{dt}\frac{dG(t, t')}{dt}dt$$

Miután $\alpha(t)$ folytonosan deriválható, az utolsó tag határesetben eltünik, az előzőleg taglalt indokok alapján, így a teljes 3. integrálból csak az első tag marad:

$$\alpha(t')\left(\frac{dG(t'+,t')}{dt}-\frac{G(t'-,t')}{dt}\right)=1\ ,$$

vagyis:

$$\frac{dG(t'+,t')}{dt}-\frac{G(t'-,t')}{dt}=\frac{1}{\alpha(t')}\ . \tag{4}$$

Helyettesítsük be a Green függvény homogn megoldásokkal előállított alakját a 2 és **??** számú feltételekbe:

$$\begin{aligned} y_1(t')A(t')-y_2(t')B(t') &= 0 \\ -\dot{y}_1(t')A(t')+\dot{y}_2(t')B(t') &= \frac{1}{\alpha(t')}\ , \end{aligned} \tag{5}$$

vagy mátrixosan felírva

$$\begin{pmatrix} y_1(t') & -y_2(t') \\ -\dot{y}_1(t') & \dot{y}_2(t') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(t') \\ B(t') \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha(t')} \end{pmatrix}$$

A fenti egyenlet egy egyszerű lineáris egyenletrendszer rögzített t' esetén, amelynek a megoldása:

$$A(t')=\frac{y_2(t')}{\alpha(t')W(t')},\qquad B(t')=\frac{y_1(t')}{\alpha(t')W(t')}\ , \tag{6}$$

ahol $W(t')=y_1(t')\dot{y}_2(t')-\dot{y}_1(t')y_2(t')$, a fenti mátrix determinánsa, az u.n. Wronski determináns. A Green függvény tehát a következő alakot ölti:

$$\boxed{G(t,t')=\begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(t')}{\alpha(t')W(t')} & \text{ha} \quad t\le t' \\ \frac{y_2(t)y_1(t')}{\alpha(t')W(t')} & \text{ha} \quad t>t' \end{cases}\ ,} \tag{7}$$

vagy a lépésfüggvényt felhasználva

$$\boxed{G(t,t')=\frac{y_1(t)y_2(t')}{\alpha(t')W(t')}\Theta(t'-t)+\frac{y_2(t)y_1(t')}{\alpha(t')W(t')}\Theta(t-t')\ .} \tag{8}$$

Példa:
Tekintsük a következő differenciálegyenletet és határozzuk meg a hozzá tartozó Green függvényt a $G(0,t')=0$, $G(\frac{5}{2}\frac{\pi}{\omega_0},t')=0$:

$$\ddot{y}+\omega_0 y=f(t)\ .$$

A homegén megoldások: $y_1(t)=\sin(\omega_0 t)$, $y_2(t)=\cos(\omega_0 t)$. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy $y_1(0)=0$ és $y_2(\frac{5}{2}\frac{\pi}{\omega_0})=0$. A Wronski determináns:ű

$$W(t)=-\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)-\frac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)=-\frac{1}{\omega_0}\ ,$$

A Green függvény:

$$G(t,t')=-\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t')\Theta(t'-t)-\frac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t')\Theta(t-t')$$