

# Közösleges differenciálegyenletek

2024. február 11.

# Differenciál számítás kezdetei

A differenciál kalkulus két megteremtője:



Isaac Newton (1643 - 1727)



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)  
*Ha gyakran elköveted a következő hibát:*

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx}$$

*ne aggódj, Leibniz is elkövette!*



# Közösleges differenciálegyenletek

A differenciálegyenlet, amellyel már középiskolában is találkoztunk:

$$F(x) = ma ,$$

Newton második törvénye. Az erő a hely függvénye, a gyorsulás a hely második deriváltja:

$$F(x) = m\ddot{x}$$

Általánosan egy  $n$ -ed rendű közösleges differenciálegyenlet:

explicit:  $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$

pl.:  $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} + mg$

implicit:  $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

pl.:  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 - E = 0$

$y = y(x)$ ,  $y^{(n)}$  az  $y(x)$  függvény  $n$ -ik deriváltja. A differenciálegyenlet rendje megegyezik a legmagasabb derivált rendjével<sup>1</sup>. A közösleges differenciálegyenletek (KDE) esetén  $y$  egyváltozós függvény. Többváltozós függvényekre parciális differenciálegyenletek vonatkoznak.

<sup>1</sup>@Forms

# Lineáris közönséges differenciálegyenletek

A lineáris KDE-t a következő alakban írhatjuk fel:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)} + r(x) .$$

Ha  $r(x) \neq 0$ , akkor a differenciálegyenletet inhomogénnek nevezzük, ha  $r(x) = 0$ , akkor homogén KDE-ről beszélünk:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)} .$$

Ha  $y_1(x)$  és  $y_2(x)$  kielégítik a homogén, lineáris differenciál egyenletet, akkor azok  $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$  lineáris kombinációi is kielégítik azt, ahol  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ . Egy  $n$ -ed rendű homogén, lineáris differenciál egyenletnek  $n$  lineáris független megoldása létezik.

# Homogén lineáris közönséges differenciálegyenletek

A lineáris homogén KDE:  $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)}$  .  $y_1$  és  $y_2$  is kielégíti a differenciálegyenletet:

$$y_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_1^{(i)},$$

$$y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_2^{(i)} .$$

Helyettesítsük be a két megoldás lineáris kombinációját a differenciál egyenletbe:

$$\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \left( \alpha y_1^{(i)} + \beta y_2^{(i)} \right) = \underbrace{\alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_1^{(i)}}_{y_1^{(n)}} + \underbrace{\beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_2^{(i)}}_{y_2^{(n)}}$$

Egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy a jobb és baloldal megegyezik.

# Inhomogén lineáris közönséges differenciálegyenletek

Az inhomogén és homogén differenciálegyenletek:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)} + r(x), \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)}$$

Ha az  $y_0(x)$  függvény kielégíti a homogén egyenletet, az  $y_p(x)$  pedig egy partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek, akkor az  $y = \alpha y_0(x) + y_p(x)$  függvény is megoldása az inhomogén egyenletnek.

$$\alpha y_0^{(n)} + y_p^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \left( \alpha y_0^{(i)} + y_1^{(i)} \right) + r(x) = \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_0^{(i)}}_{y_0^{(n)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y_1^{(i)} + r(x)}_{y_p^{(n)}}$$

Az előző, homogén differenciálegyenletre vonatkozó tétel alapján, ha az  $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$  függvények kielégítik a homogén differenciálegyenletet, akkor a  $y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) + y_p(x)$  függvény is kielégíti az inhomogén differenciálegyenletet, ahol  $\alpha_i \in \mathcal{C}$ .

# Lineáris differenciálegyenletek kezdetiérték problémája

Tekintsük a következő  $n$ -ed rendű, közönséges, homogén, lineáris differenciálegyenletet:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_n(t)y^{(n)}(t) = 0 ,$$

Egy kezdeti érték probléma esetén a  $t = 0$  kezdő pillanatban meg kell adnunk  $n$  függvény értéket:  $y^{(j)}(0) = b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Az  $n$ -ed rendű lineáris differenciálegyenletnek  $n$  darab lineárisan független homogén megoldása van, jelölje ezeket  $y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . A kezdeti értéknek megfelelő megoldást ezek lineáris kombinációjaként kereshetjük, amelyeknek ki kell elégítenie a kezdeti feltételeket:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) , \quad y^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(0) = b_j .$$

A  $b_j$  együtthatókra egy lineáris egyenlet rendszert kaptunk:

$$\underline{Y} \underline{c} = \underline{b} , \quad Y_{ji} = y_i^{(j)}(0)$$

# Lineáris differenciálegyenletek kezdetiérték feladat

$$\underline{Y}\underline{c} = \underline{b}, \quad Y_{ji} = y_i^{(j)}(0)$$

A  $c_i$  együtthatókat, amennyiben az  $\underline{Y}$  mátrixnak létezik az inverze, egyszerűen megkaphatjuk:

$$\underline{c} = \underline{Y}^{-1}\underline{b}$$

A  $c_i$  együtthatókat visszahelyettesítve a megoldás függvénybe a következőt kapjuk:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} y_i(t) Y_{ij}^{-1} b_j$$

Mennyire távolodnak egymástól  $t$  idő múlva a megoldások, ha a kezdeti feltételeket egy kicsiny  $\underline{\Delta}$  vektorral megváltoztatjuk?

$$y'(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} y_i(t) Y_{ij}^{-1} (b_j + \Delta_j), \quad y'(t) - y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} y_i(t) Y_{ij}^{-1} \Delta_j$$

Tételezzük fel, hogy egyik homogén megoldás sem szinguláris és az  $\underline{Y}^{-1}$  mátrixnak létezik a spektrál felbontása. Ekkor felülről becsülhetjük az  $\underline{Y}^{-1}$  mátrixot egy egység-mátrixszal a legnagyobb sajátértékével. Könnyen beláthatjuk, hogy a megoldások különbsége eltűnik akkor, ha  $\underline{\Delta}$  is tart nullához:  $\lim_{\underline{\Delta} \rightarrow 0} y'(t) - y(t) = 0$



## Elsőrendű differenciálegyenlet

$$F(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y)$$

Kezdeti érték vagy Cauchy probléma:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

A  $\varphi(x) : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$  ( $a < b$ ) függvény megoldásfüggvénye a differenciálegyenletnek, ha

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a, b).$$

A  $\varphi$  megoldásfüggvénye a Cauchy problémának, ha van olyan  $(a, b)$  intervallum ( $a < b$ ), hogy

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a, b) \text{ ahol } x_0 \in (a, b) \text{ és } \varphi(x_0) = y_0$$

Feltételezzük, hogy  $\varphi(x)$  majdnem mindenütt differenciálható az  $(a, b)$  intervallumon.

## Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

$$y' = f(x)g(y)$$

$f(x)$  és  $g(x)$  folytonos az  $(a, b)$  intervallumon és  $g(y) \neq 0$  ezen a tartományon. Írjuk át a differenciálegyenletet és integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{C}$$

Legyenek a primitív függvények

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Ekkor a megoldásra a következő implicit egyenletet kapjuk:

$$G(y) = F(x) + C$$

## Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

Folyadékban mozgó testet, amelyre csak a sebességgel arányos súrlódási erő hat:<sup>2</sup>

$$ma = m\dot{v} = -\alpha v \implies \dot{v} = -\frac{\alpha}{m}v$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m} \int dt + \ln(C)$$
$$\ln(v) = -\frac{\alpha}{m}t + \ln(C)$$

Innen kifejezhetjük  $v$ -t:

$$v(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

Az elmozdulást újboli integrálással kaphatjuk meg:

$$x(t) = \int v(t)dt = x_0 - C\frac{m}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

## Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

Harmonikus oszcillátor Írjuk fel egy harmonikus oszcillátor energiáját:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Átrendezve egy implicit elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 - E = 0$$

Rendezzük át explicit alakra és csinósítsuk egy kicsit a kifejezést:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{k}{2}x^2 \right)} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának a módszerét:

# Homogén elsőrendű differenciálegyenletek

## Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}$$

Írjuk fel az integrálokat:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} = \int dt + C$$

Vezessük be az új,  $y = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$  változót, ekkor  $dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}dy$ :

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dt + C$$

Végezzük el az integrálokat és helyettesítsük vissza  $x$ -et:

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin(y) = t + C, \quad \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi$$

## Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi$$

Vezessük be az  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  körfrekvenciát és fejezzük ki az  $x$  elmozdulást:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \varphi)$$

Amikor a rugó megnyúlása a legnagyobb, a test sebessége éppen nullával egyenlő, vagyis a teljes energia megegyezik a rugó potenciális energiájával:  $E = \frac{k}{2}A^2$ , ahol  $A$  a

mozgás amplitúdója. Az amplitúdó tehát  $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$