Közönséges differenciálegyenletek 2. rész

2021. február 9.

Homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x)g(y)$$

A $g(y) = y$ választással egy elsőrendű homogén, lineáris differenciálegyenletet kapunk,

$$y' = f(x)y$$

amelyet a változók szétválasztása módszerrel megoldhatunk:

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx + C, \qquad \ln(y) = \int f(x)dx + C$$

az egyenlet megoldása:

$$y(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Az elsőrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenlet alakja:

$$y' + p(x)y = q(x) \ .$$

A megoldáshoz mindkét oldalt szorozzuk be egy $u(x)$ függvénnyel:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)q(x) \ .$$

A bal oldalt egy teljes deriválttá alakíthatjuk, ha az $u(x)$ függvény kielégíti a következő feltételt: $u(x)p(x) = u'(x)$. Ez maga is egy differenciál egyenlet, melynek a megoldása:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \ .$$

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)y' + u'(x)y = \frac{d(uy)}{dx} = u(x)q(x).$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$uy = \int u(x)q(x)dx + C \ , \qquad C \text{ integrálási konstans.}$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)} \ .$$

Inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Az inhomogén differenciálegyenlet:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

A megoldás:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)} \ , \quad \text{ahol } u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_h' + p(x)y_h = 0 \ , \qquad y_h(x) = e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{u(x)}$$

Tehát az inhomogén egyenlet megoldását a homogén megoldás és egy partikuláris megoldás lineáris kombinációjaként írhatjuk fel.

Bernoulli differenciálegyenlet

$$\dot{y} + p(t)y = q(t)y^n \quad \Rightarrow \quad \dot{y}y^{-n} + p(t)y^{1-n} = q(t)$$

Vezessünk be egy új változót: $v = \dfrac{1}{1-n}y^{1-n}$ és deriváljuk t szerint:

$$\dot{v} = \frac{1}{1-n}(1-n)y^{-n}\dot{y} = y^{-n}\dot{y} \; .$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\dot{v} + (1-n)p(t)v(t) = q(t)$$

egy inhomogén, lineáris differenciálegyenletet kapunk, amelyet már meg tudunk oldani.

Állandórgyütthatós elsőrendű differenciálegyenlet rendszer

Az elsőrendű, homogén, lineáris differenciálegyenletek egy speciális esete az állandó együtthatós KDE:

$$y' = ay \;, \quad \text{megoldás:} \quad y = Ce^{at}$$

Differenciálegyenlet rendszer esetén töb, csatolt elsőrendű differenciálegyenletünk van:

$$y_i' = A_{ij}y_j \;, \quad i,j = 1,\ldots n \;, \qquad \text{tömören} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

Pl:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned} \quad , \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Keressük a differenciál egyenlet rendszer megoldását a

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0)$$

alakban. Hogyan értelmezhetjük egy mátrix függvényét és hogyan deriválhatjuk le?

Mátrixok szorzását, hatványozását tudjuk értelmezni. Mátrix függvényeket a hatványsoruk segítségével értelmezzük:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n$$

Az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix függvény idő szerinti deriváltja:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \frac{d}{dt}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\mathbf{A}^n t^{n-1} = \mathbf{A}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} \; .$$

Az utolsó tag összegzésében írjuk át az indexeket:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

Helyettesítsük be a kapott eredményt a differenciáál egyenletünkbe:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) \; ,$$

Mátrixfüggvények meghatározása spektrálfelbontással:
Jobb és baloldali sajátvektorok:
Tételezzük fel, hogy az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrixnak léteznek a sajátértékei és a sajátvektorai:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{u}_i \;, \qquad \mathbf{v}_i^+ \mathbf{A} = \alpha_i \mathbf{v}_i^+ \quad \mathbf{u}_i \text{ oszlopvektor } \; \mathbf{v}_i^+ \text{ sorvektor}$$

- $a_i = \alpha_i$ a jobb és baloldali sajátértékek megegyeznek

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{u}_i \;, & \mathbf{v}_i^+ \mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i^+ \mathbf{A} = \alpha_i \mathbf{v}_i^+ \;, & \mathbf{v}_i^+ \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_i \end{array}\right\} (a_i - \alpha_i)\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow a_i = \alpha_i$$

- A különböző sajátértékekhez tartozó job és baloldali sajátvektorok merőlegesek egymásra

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{u}_i \;, & \mathbf{v}_j^+ \mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{v}_j^+ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_j^+ \mathbf{A} = a_j \mathbf{v}_j^+ \;, & \mathbf{v}_j^+ \mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_j \mathbf{v}_j^+ \mathbf{u}_i \end{array}\right\} (a_i - a_j)\mathbf{v}_j^+ \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_j^+ \mathbf{u}_i = 0 \text{ ha } i \neq j$$

A $\{\mathbf{v}_i\}$ és $\{\mathbf{u}_i\}$ vektorok biortogonális vektorteret alkotnak. $\{\mathbf{v}_i\}$ az $\{\mathbf{u}_i\}$ duálisa.

$$\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

Mátrixfüggvények meghatározása spektrálfelbontással:
Térjünk vissza a példe differenciálegyenletünkre:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A mátrix függvény kiszámításához diagonalizáljuk a mátrixot. 2×2-es mátrix karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - \mathrm{tr}\mathbf{A} + \det\mathbf{A} = 0$, a konkret esetben: $\lambda^2 + 1 = 0$. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Jobboldali sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Baloldali sajátvektorok:

$$(1 \quad i) \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \quad -i) \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{v}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) \quad \mathbf{v}_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$$

Mátrixfüggvények meghatározása spektrálfelbontással:
Képezzünk két mátrixot jobb- és baloldali sajátvektorokból:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

A biortogonalitás következtében a két mátrix egymás inverze! Könnyen beláthatjuk, hogy

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Általában igaz:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \Lambda ,$$

ahol $\mathbf{U}$ a jobboldali sajátvektorokból képzett mátrix, Λ pedig a sajátértékekből álló diagonális mátrix.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{-1} , \qquad \mathbf{A}^n = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{-1} \ldots \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\Lambda^n\mathbf{U}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{U}\Lambda^n\mathbf{U}^{-1}t^n = \mathbf{U}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Lambda^n t^n\right)\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}e^{\Lambda t}\mathbf{U}^{-1}$$

Mátrixfüggvények meghatározása spektrálfelbontással:

A mi konkrét esetünkben:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it}+e^{-it} & i(e^{it}-e^{-it}) \\ -i(e^{it}-e^{-it}) & e^{it}+e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

Vagy:

$$y_1(t) = \cos(t)y_1(0) - \sin(t)y_2(0)\ , \qquad y_2(t) = \cos(t)y_1(0) + \sin(t)y_2(0)$$