Közönséges differenciálegyenletek 3. rész
Másodrendű differenciálegyenletek

2021. február 14.

N-ed rendű differenciálegyenlet átalakítása elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré

Tekintsük a következő n-ed rendű differenciálegyenletet:

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, (y^{(n-2)}, \ldots, y, t), \qquad\qquad y \in \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

Az $y(x)$ függvényből és deriváltjaiból építsünk fel egy n elemű oszlopvektort:
$y_i(x) = y^{(i)}(x)\ , i = 0, 1, \ldots n-1$, ahol a (0)-ik derivált maga a függvény: $y_0(x) = y(x)$.
Így a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= y_1 \\
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\dot{y}_{n-1} &= F(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots y_0, t)
\end{aligned}$$

N-ed rendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet

Tekintsünk egy állandóegyütthatós n-ed rendű differenciálegyenletet:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(x) = y^{(n)} \,, \qquad y \in \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

A differenciálegyenletet átírhatjuk a következő alakra:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= y_1 \\
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\dot{y}_{n-1} &= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \ldots a_{n-1} y_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Mátrix alakban $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, ahol az $\mathbf{A}$ mátrix a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Csillapított harmonikus oszcillátor

A csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} \,, \qquad x_0(t) = x(t) \,,\; x_1(t) = \dot{x}(t)$$

Írjuk át elsőrendű k.d.e. rendszerre:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= -\frac{D}{m}x_0 - \frac{\alpha}{m}x_1 \,. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\frac{2}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

ahol bevezettük az $\omega_0^2 = D/m$ és $\tau = 2m/\alpha$ jelölést. A karakterisztikus polinom és a sajátértékek:

$$\lambda^2 + \frac{2}{\tau}\lambda + \omega_0^2 = 0 \,, \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} \,.$$

- $\omega_0 > 1/\tau$ komplex sajátértékek, csillapított harmonikus rezgőmozgás
- $\omega_0 < 1/\tau$ valós sajátértékek, túl csillapított mozgás
- $\omega_0 = 1/\tau$ kritikus csillapítás

Csillapított harmonikus oszcillátor

- Csillapított rezgőmozgás: $\omega_0 > 1/\tau$
  A sajátértékek komplexek: $\lambda_1 = -\frac{t}{\tau} + i\omega$ és $\lambda_1 = -\frac{t}{\tau} - i\omega$, ahol $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$.
  A Cauchi probléma megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} \mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1 \mathbf{x}(0)) + e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2 \mathbf{x}(0))$$

Határozzuk meg a sajátvektorokat:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\frac{2}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Minden állandóegyütthatós másodrendű k.d.e.-nek ilyen alakúak a jobboldali sajátvektorai.

Baloldali sajátvektorokhoz invertáljuk meg a jobboldali sajátvektorokból felépített mátrixot:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det} \begin{pmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{pmatrix}$$

Csillapított harmonikus oszcillátor

A jobb és baloldali sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A k.d.e. megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t}(\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0)) + \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t}(-\lambda_1 x(0) + \dot{x}(0))\right)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} ((\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1(\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_1 t} - \lambda_2(\lambda_1 x(0) - \dot{x}(0))e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Bejelyettesítve λ_1, λ_2 értékét: $\lambda_2 - \lambda_1 = -2i\omega$, $\lambda_1\lambda_2 = \omega_0^2$, $\lambda_{12} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega$ megkapjuk a differenciálegyenlet megoldását. Vegyük észre, hogy a megoldás

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}, \qquad \dot{x}(t) = a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \text{alakú.}$$

λ_1 és λ_2 valós része megegyezik, ezért tovább egyszerűsíthetjük:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\tilde{a}\cos(\omega t) + \tilde{b}\sin(\omega t)\right)$$

Túlcsillapított harmonikus oszcillátor

Ha $\omega_0 < 1/\tau$, akkor $\lambda_1\ , \lambda_2 \in \mathcal{R}$. A megoldás menete megegyezik a csillapított rezgőmozgás esetével. Könnyen belátható, hogy $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} < 0$, így lecsengő megoldást kapunk a következő alakban:

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}\ ,$$

ahol a, b értékét a kezdőfeltételek határozzák meg.

Állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Egy n-ed rendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(x) = y^{(n)}$$

megoldását általában kereshetjük $e^{\lambda t}$ alakban. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe, az u.n. karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j - \lambda^n = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megegyezik az előző sajátérték probléma karakterisztikus egyenletével másodrend esetén. A megoldást a következő alakban keressük:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}$$

A c_j együtthatókat a kezdőfeltételekből határozzhatjuk meg. Kezdetiérték probléma esetén a c_j együtthatókat a következő lineáris egyenlet rendszer megoldásaként kapjuk:

$$y^{(i)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^i c_j$$

Kritikusan csillapított harmonikus oszcillátor

Kritikus csillapítás esetén $\omega_0 = 1/\tau$. Csak egy sajátértékünk van! Keressük meg a saját vektorát:

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \,, \qquad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

Másik bázisvektornak válasszunk $\mathbf{u}_1$-ra merőleges vektort:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

Szerkesszük meg $\mathbf{u}_1$-ből és $\mathbf{u}_2$-ből a transzformációs mátrixot és az inverzét:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \begin{pmatrix} -1 & \omega_0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \,, \qquad \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \begin{pmatrix} -1 & \omega_0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transzformáljuk a mátrixunkat az $\mathbf{U}$ mátrixszal:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \mathbf{U} &= \frac{1}{1+\omega_0^2} \begin{pmatrix} -1 & \omega_0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \omega_0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_0 & -1-\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} = \underbrace{-\omega_0 \mathbb{1} - (1+\omega_0^2)\mathbf{N}}_{\text{Jordan alak}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix}\mathbf{U} = -\omega_0 \mathbb{1} - (1+\omega_0^2)\mathbf{N}\ ,$$

ahol $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotens mátrix: $\mathbf{N}^2 = 0$, $\mathbb{1}$ pedig 2×2-es egységmátrix. Az $\alpha\mathbb{1} + \beta\mathbf{N}$ alakú mátrixokat Jordan blokknak hívjuk: $\mathbb{1}$: $n\times n$-es egységmátrix, $\mathbf{N}$: n-ed rendű nilpotens mátrix. A nem diagonalizálható mátrixokat Jordan alakra tudjuk transzformálni, amely diagonális és Jordan blokkokat tartalmaz.
A megoldást a következő alakban kereshetjük:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}e^{-\omega_0\mathcal{I}t-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}t}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(t_0)\ .$$

Írjuk fel az exponenciális függvény sorát:

$$e^{-\omega_0\mathcal{I}t-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(-\omega_0\mathcal{I} - (1+\omega_0^2)\mathbf{N}\right)^n\ .$$

Használjuk a binomiális tételt: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \dots b^n$. A binomiális kifejtésből csak azok a tagok maradnak, amelyek $\mathbf{N}$ első hatványát tartalmazzák.

$$\left(-\omega_0\mathcal{I}-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}\right)^n=(-\omega)^n\mathcal{I}-n(-\omega)^{n-1}(1+\omega_0^2)\mathbf{N}\ ,$$

Helyettesítsük be az exponenciális fv. sorfejtésébe:

$$e^{-\omega_0\mathcal{I}t-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega_0)^n t^n}{n!}\mathcal{I}-(1+\omega_0^2)\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(-\omega)^{n-1}t^n}{n!}\mathbf{N}$$

A második tagot egy kicsit átrendezhetjük:

$$e^{-\omega_0\mathcal{I}t-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega_0)^n t^n}{n!}\mathcal{I}-(1+\omega_0^2)t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{N}\ .$$

Ha a második összegzésben bevezetjük az összegző indexben az $m=n-1$-et, akkor a így alakul az exponenciális kifejezés:

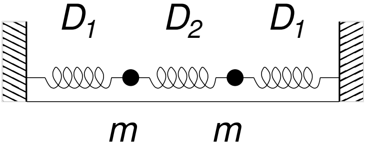
$$e^{-\omega_0\mathcal{I}t-(1+\omega_0^2)\mathbf{N}t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\omega_0)^n t^n}{n!}\mathcal{I}-(1+\omega_0^2)t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\omega)^m t^m}{m!}\mathbf{N}=e^{-\omega_0 t}\mathcal{I}+te^{-\omega_0 t}\mathbf{N}$$

A kritikusan csillapítot oszcilátor megoldását a következő alakban kereshetjük:

$$x(t)=ae^{-\omega_0 t}+bte^{-\omega_0 t}\ ,$$

ahol a és b szabad paraméterek.

Az ábrán látható rendszerben a testek vízszintesen, egy egyenes mentén mozoghatnak súrlódás nélkül.



A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -D_1 x_1 - D_2(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -D_1 x_2 - D_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(D_1 + D_2)/m & D_2/m \\ D_2/m & -(D_1 + D_2)/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $\Omega^2 = (D_1 + D_2)/m$, $\omega^2 = D_2/m$.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\Omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{O}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix} -\Omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\Omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{O}\mathbf{x}$$

Keressük a megoldást $\mathbf{x}=e^{\lambda t}\mathbf{u}_i$ alakban, ahol $\mathbf{u}_i$ az $\mathbf{O}$ mátrix egy sajátvektora:

$$\ddot{\mathbf{x}}=\lambda^2 e^{\lambda t}\mathbf{u}_i=\mathbf{O}e^{\lambda t}\mathbf{u}_i=\alpha_i e^{\lambda t}\mathbf{u}_i\ ,$$

ahol α_i az $\mathbf{O}$ mátrix sajátértéke. Az egyenletből leolvasható: $\lambda=\pm\sqrt{\alpha_i}$. A mátrix karakterisztikus polinomja: $\alpha^2+2\Omega^2+\Omega^4-\omega^4=0$ A sajátértékek: $\alpha_1=-\Omega^2+\omega^2$, $\alpha_2=-\Omega^2-\omega^2$. A sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Mindkét sajátérték negatív, ezért a λ kitevők képzetesek lesznek: $\lambda_1=\pm i\sqrt{\Omega^2-\omega^2}$ és $\lambda_2=\pm i\sqrt{\Omega^2+\omega^2}$. A megoldások: ($a$, b, c, d szabad paraméterek).

$$\mathbf{x}(t)=(ae^{i\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t}+be^{-i\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t})\mathbf{u}_1+(ce^{i\sqrt{\Omega^2+\omega^2}t}+de^{-i\sqrt{\Omega^2+\omega^2}t})\mathbf{u}_2 \quad \text{vagy}$$
$$=(\tilde{a}\cos(\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t)+\tilde{b}\sin(\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t))\mathbf{u}_1+(\tilde{c}\cos(\sqrt{\Omega^2+\omega^2}t)+\tilde{d}\sin(\sqrt{\Omega^2+\omega^2}t))\mathbf{u}_2$$

- Bessel függvények:
  - Bessel fv. $J_\alpha(x)$, $Y_\alpha(x)$, $\quad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$
  - Módosított Bessel fv. $I_\alpha(x)$, $K_\alpha(x)$, $\quad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2+\alpha^2)y=0$
  - Szférikus Bessel fv. $j_n(x)$, $n_n(x)$, $\quad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-n(n+1))y=0$
- Airy függvények: $Ai(x)$, $Bi(x)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}-xy=0$
- Legendre polinom: $P_n(x)$, $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dP_n}{dx}\right)+n(n+1)P_n(x)=0$
- Asszociált Legendre polinom: $P_l^m(x)$,
  $\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dP_l^m}{dx}\right)+\left(l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m(x)=0$