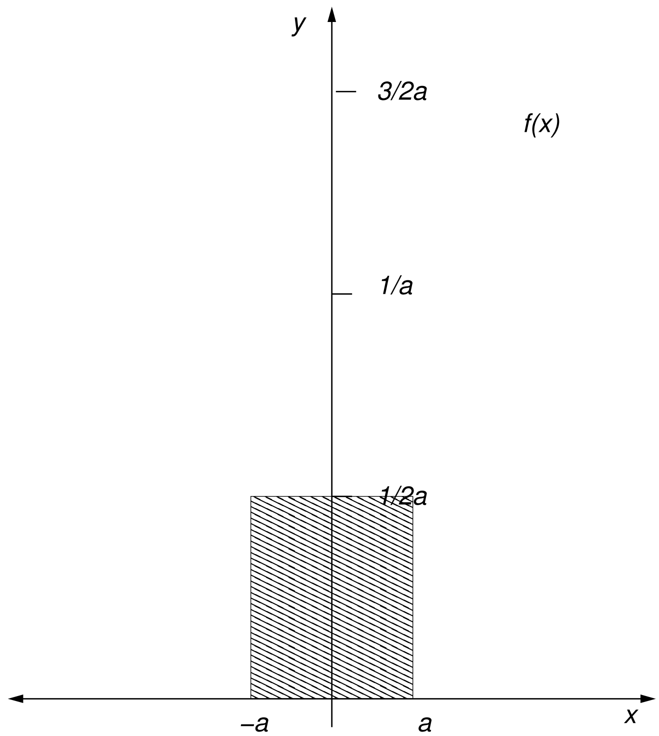
Dirac delta függvény (disztribúció)

Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$f(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |x| > a \\ \frac{1}{2a} & \text{ha} \quad |x| \le a \end{cases}$$



A függvny integrálja az ábrán látható téglalp területével egyezik meg, amely a tetszőleges értéke mellett egységnyi lesz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1$. Ha a értéke közelít nullához, akkor a függvény nyilvánvalóan végtelenhez tart, de az integrálja ebben az esetben is egy lesz:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)dx = 1 \ .$$

Nézzük meg, hogy mi lesz a következő integrál értéke:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = ?$$

ahol $g(x)$-ről feltételezzük, hogy folytonos függvény. Az integrál becsléséhez használjuk az integrál középérték tételt: vagyis létezik az $(-a,a)$ intervallumon egy x_0 amelyre teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = 2ag(x_0).$$

Ha a értékével nullához tartunk, akkor nyilván

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,a)g(x)dx = g(0)$$

Azt mondjuk, hogy a $\lim_{a\to 0} f(x,a)$ határérték az u.n. Dirac delta egy előállítását adja:

$$\lim_{a\to 0} f(x,a) = \delta(x) \ .$$

A Dirac delta disztribúciót az integrálján keresztül értelmezhetjük:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta(x-x_0)dx = g(x_0) \ ,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsiny valós szám. A fenti definícióból következik, hogy

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx = 1 \ .$$

Az integrál segítségével értelmezhetjük a Dirac delta deriváltját is, egy parciális integrál seg1tségével:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta'(x-x_0)dx = g(x_0+\varepsilon)\delta(\varepsilon) - g(x-\varepsilon)\delta(-\varepsilon) - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g'(x)\delta(x-x_0)$$

A fenti egyenletben $\delta(\varepsilon)$ és $\delta(-\varepsilon)$ eltünik, hiszen a Dirac delta csak a nullánál különbözik nullától, így

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\delta'(x-x_0)dx = -\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g'(x)\delta(x-x_0) = g'(x_0) \ .$$

Nézzük meg a következő integrált:

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx =$$

Alkalmazzuk az $z = g(x)$ helyettesítést, ekkor $dx = \dfrac{dz}{|g'(x)|}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\delta(z)}{|g'(x)|}dz$$

A Dirac delta kicsippenti azokat az értékeket, ahol az argumentuma nulla lesz, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \ ,$$

ahol x_i a $g(x)$ függvény zérushelyeit jelöli. Nézzük meg a következő példát:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\delta(\sin(x))dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi}}{|\cos(n\pi)|} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \ ,$$

ahol kihasználtuk, hogy a $\sin(x)$ függvénynek $n\pi$ a zérushelyei és $|\cos(n\pi)| = 1$, valamint felhasználtuk a geometriai sorra vonatkozó összegszabályt.

A Dirac delta néhány más előállítása:

- A Gauss függvény e^{-x^2} az ismert haranggörbe alakú függvény. Az improprius integrálját később megtanuljuk meghatározni, most higgyük el:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

A következő függvény integráljáról könnyen beláthatjuk, hogy egységnyi a tetszőleges választása esetén:

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = 1 \ .$$

Ha csökkentjük az a paraméter értékét, akkor a harnggörbe egyre keskenyebb lesz, de a magassága egyre nő. Ha a-val tartunk nullához, akkor a Dirac delta egy másik előállításához jutunk:

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \delta(x) \ .$$

- Egy lehetséges másik előállításhoz induljunk ki a $\dfrac{\sin(x)}{x}$ függvényből. Először határozzuk meg az inproprius integrálját:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx =?$$

Sajnos ennek a függvénynek nem lehet felírni a primitív függvényét. Az inproprius integrál meghatározásához vezessük be a köbvetkező függvényt:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\sin(x)}{x} dx \ .$$

Nyilvánvalóan $F(0)$ visszaadja a keresett integrál felét, $F(s)$ értéke pedig a végtelenben nulla kell, hogy legyen. Deriváljuk az előző egyenletet:

$$F'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \sin(x) dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-(y-i)x} - e^{-(y+i)x}\right) dx = -\frac{1}{1+s^2}$$

Vagyis a következő differenciál egyenlethez jutottunk, amelyet az $F(\infty) = 0$ feltétellel kell megoldanunk: $F'(s) = -\dfrac{1}{1+s^2}$. Az egyenlet megoldása integrálás után:

$$F(s) = -\mathrm{arctg}(s) + C \ .$$

Az $\mathrm{arctg}(s)$ függvény a végtelenben $\pi/2$, tehát a megoldás $F(s) = -\mathrm{arctg}(s) + \pi/2$ és $F(0) = \pi/2$, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi \ .$$

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(ax)}{x} \ .$$

Könnyen beláthatjuk, hogy az integrálja a teljes valós tengelyen egy lesz, függetlenül a értékétől. A függvény a maximumát az $x = 0$ helyen veszi fel és attól távolódva rohamosan csökken az értéke. Az első zárus helye az π/a helyen lesz. Ha az a paraméterrel tartunk a végtelen felé, akkor a zérushelyek egyre közelebb kerülnek és a függvény maximuma egyre nagyobb lesz, tarunk a Dirac deltához:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(ax)}{x} = \delta(x) \ .$$