

Elektrodinamika

Bevezetés

A „**Kísérleti Fizika**” tantárgyban már megismerkedtünk a Maxwell egyenletekkel amelyek segítségével megérteni és magyarázni tudjuk a hétköznapijainkban tapasztalható elektromágneses jelenségeket. A technika világában gépeket, berendezéseket tervezünk és gyártunk mindenféle méretben és számtalan céllal. Az ezt megvalósító „mérnöki” szakma is az ezen egyenletek által megfogalmazott törvények keretei között tevékenykedik.

A Maxwell egyenletek tehát az Elektrodinamika „axiómái”. „Fizikai értelemben” ma már bizonyítottnak vehetők. Azaz a megszületésük (1864) óta eltelt kb.150 év alatt minden klasszikus elektromágneses jelenséget a segítségével meg tudunk magyarázni és nem tapasztalatunk egyetlen egy olyan effektust sem, amely cáfolta volna ezen törvények helyességét. Ez valójában azt jelenti, hogy ma már pontosan ismerjük a jelenségek azon körét, amelyekre ezek a törvények érvényesek. Mindaddig, amíg a „fotonokat” nem vesszük észre, addig a Maxwell egyenletek teljesen kielégítő alaptörvényeket jelentenek. Ezt nevezzük a „klasszikus elektrodinamikának”. Ma már tudjuk azonban, hogy a jelenségek mélyén mindig „fotonok viselkedése” húzódik meg. Ezt pedig már a „Kvantumelektrodinamika” tárgyalja. Azaz, ha úgy tetszik, akkor a Maxwell egyenletek rendszere tulajdonképpen az igen nagyszámú fotonból (10^{23}) álló fizikai rendszerek makroszkopikus viselkedésének a törvényeit jelenti. Ez az, amit a mi (makroszkopikus) műszereink „Elektromágneses térként” (**EMT**) érzékelnek.

Joggal merülhet fel a kérdés, hogy van-e egyáltalán különbség a „Kísérleti Fizikában” tanult elektrodinamika és most, az „**Elméleti Fizika**” keretében tárgyalásra kerülő ismeretek között. A válasz nyilvánvalóan az, hogy csak egyféle Elektrodinamika létezik és így tulajdonképpen mindig „ugyanarról” beszélünk. Ugyanarról, de nem ugyanúgy! A különbség tulajdonképpen a „szemléletben” van.

A Kísérleti Fizika során lényegében egy „**induktív módszert**” alkalmaztunk. Azaz sok egyedi megfigyelés és elvégzett kísérlet után jellegzetes „szabályosságokat” vettünk észre. Majd ezeket a szabályokat általánosítottuk, azaz kimondtuk, hogy adott körülmények között lényegében mindig ugyanazt fogjuk tapasztalni a „konkrét tárgyi” megvalósulástól függetlenül. Majd ezeket a felismert törvényeket hierarchiába rendeztük. Azaz rájöttünk arra, hogy melyek azok, amelyek egymástól függetlenek és amelyekből az összes többi „logikailag” következik. Így született meg a Maxwell egyenletek rendszere.

Az „Elméleti Fizika” más utat követ és más a célja is. „**Deduktív módszert**” alkalmaz. Azaz a „Maxwell egyenleteket” adottnak veszi. Nem foglalkozik azzal, hogy arra miként jöttünk rá. Elfogadja mint „feltételezett alaptörvényeket” (axiómák) és megnézi, hogy „mi jön ki belőlük”. Azaz milyen származtatott törvények sokaságát lehet „kihámozni” ebből a rendszerből. Majd megkeresi azokat a konkrét jelenségeket, amelyek mintegy „igazolják” a kapott törvényeket.

A dolgok természetéből fakad, hogy az Elméleti Fizikában viszonylag bonyolult matematikai apparátust kell mozgatnunk, hiszen itt az alapfogalmak megértésén már túl vagyunk. A cél az összetett jelenségek minél pontosabb matematikai modellezése.

Először a Maxwell egyenletek ún. integrális alakjával ismerkedtünk meg.

Az egyenleteknek „nevük” is van. Azokról a természettudósokról neveztük el őket, akik hozzájárultak az illető axióma felfedezéséhez (akár kísérleti, akár elméleti munkásságukkal).

- 1.) Az elektromosság **Gauss** tétele (**Coulomb** törvény általánosítása)
- 2.) A mágneses Gauss törvény
- 3.) A **Faraday**-féle indukció törvény.
- 4.) Az Ampere- **Maxwell** törvény

Mindezeket a Kísérleti Fizika tantárgyban már megtanultuk.

1.) $\oint \vec{E} d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N Q'_i$	3.) $\oint_g \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{F}$
2.) $\oint \vec{B} d\vec{F} = 0$	4.) $\oint_g \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I'_i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{F}$



Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)



Michael Faraday
(1791-1867)

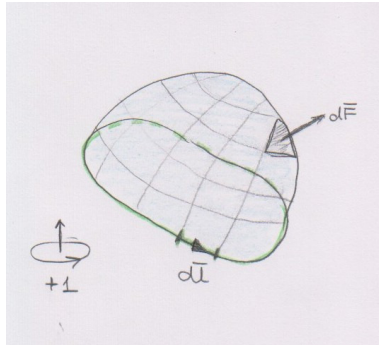


Charles Augustin de Coulomb
(1736-1806)



Andre-Marie Ampere
(1775 -1836),

Itt nagyon fontos az integrálási zárt „g” görbe ($\oint_g d\vec{l}$) és az általa definiált „F” felületen történő integrálás ($\int_F d\vec{F}$) közötti „előjel konvenció” rögzítése. Ennek értelmében az adott felület bármelyik „+ $d\vec{F}$ ” felületelem vektorát és a kontúrján felvett „+ $d\vec{l}$ ” elmozdulás vektort „jobb kéz szabály” köti össze.



2.ábra

Az egyenletek bármilyen kicsi görbére és felületre igazak. Ez lehetőséget ad arra, hogy az elektromágneses mező viselkedését egy adott pontban vizsgáljuk. Végrehajthatjuk az alábbi „límeszeket” ezzel mintegy „rázsugorodunk” az adott pontra és így az elektromágneses mező „pontbeli” tulajdonságait kapjuk meg. Egy valamilyen adott $\vec{K}(\vec{r})$ vektormező (vektortér) esetén

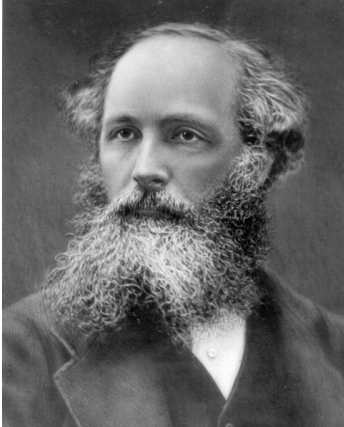
$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_F \vec{K} d\vec{F} = \text{div} \vec{K} = \nabla \cdot \vec{K}$$

ahol „V” az „F” által körbezárt térfogat.

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{1}{F} \oint_g \vec{K} d\vec{l} = -\vec{e}_n \cdot [\text{rot} \vec{K}] = -\vec{e}_n \cdot [\nabla \times \vec{K}]$$

ahol \vec{e}_n a „g” síkgörbe által definiált „F” felület normális egységvektora.

A Matematikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a „pontra való rázsugorodás során az „integrál egyenletek” differenciálegyenletté alakulnak át. Azaz a „divergencia”, a „rotáció” és a „gradiens” deriválási műveletekkel is kifejezhetők. Ennek megfelelően az integrális egyenletekben (az EMT forrásaiként) szereplő Q_i ponttöltésektől és I_i vonaláramoktól meg kell szabadulnunk. Ez úgy lehetséges, ha itt is a kontinuum modellünket vesszük elő és $\rho(\vec{r}, t)$ töltéssűrűségeket és $\vec{j}(\vec{r}, t)$ áramsűrűségeket vezetünk be.

1.) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 2.) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 3.) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 4.) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	
(1864)	James Clerk MAXWELL 1831-1879

Ezzel megkaptuk a „Maxwell egyenletek” differenciális alakját. A továbbiakban ezekkel foglalkozunk. Jóllehet egyes problémák megoldása néha „egyszerűbb” lehet az integrális „Maxwell egyenletek alkalmazásával.

A Maxwell egyenletek rendszere egyben lehetőséget ad az elektromágneses jelenségek egyfajta osztályozására is.

1.) Az „Elektrosztatika” álló elektromos töltések által keltett elektrosztatikus mezők („terek”) tulajdonságaival és kiszámításával foglalkozik. Az alaptörvények ekkor

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Az első neve (mint az ismeretes) „az elektrosztatika Gauss törvénye”. A második azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér rotáció mentes.

2.) A „Magnetosztatika” időben állandó mágneses terek általános tulajdonságait vizsgálja. Az alapegyenletünk a mágneses Gauss törvény

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Ez azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy nincsenek mágneses monopólusok, legalább is eddig nem tapasztaltuk ezeknek a jelenlétét. Az állítás azért „érdekes”, mert nem ismerünk olyan alapvető „szimmetriatörvényt”, amely tiltaná ezeknek a létét. Az igazi kérdés tehát valójában az, hogy „Miért nem létezik a megfigyelhető környezetünkben mágneses monopólus, ha egyszer **létezhetne?**” Erre a kérdésre csak egy „kozmológus” és/vagy egy „részcsekefizikus tud(na)” válaszolni. A válaszuk azonban eléggé hipotétikus (feltevés jellegű) lenne.

A permanens mágnesek („mágnesrudak”) igen sok (10^{23} db) mágneses dipólus rendezett alakzata. Ezek makroszkopikus terének a meghatározása szintén a magnetosztatika feladata. Ekkor az előző egyenletünkhöz hozzá kell venni még a következő Maxwell egyenletet is.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\nabla \times \vec{M})$$

Ez éppen azt fejezi ki, hogy az \vec{M} -el jellemzett mágneses anyagok mágneses teret hoznak létre.

3.) A „Stacionárius áramok tere” azzal foglalkozik, hogy időben állandó (stacionárius) áram sűrűségek (\vec{j}^{SZ}) milyen mágneses teret hoznak létre. Az alapegyenlet ekkor az ún. Ampere törvény

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}^{SZ}$$

Természetesen a Gauss törvény továbbra is igaz, azaz

$$\nabla \vec{B} = 0$$

4.) A „Kvázi-stacionárius áramok tere” gyakorlatilag a Faraday-féle indukció törvényt foglalja magába. Ugyanis az áram által keltett lassan változó mágneses tér elektromos teret indukál, de ennek a további indukciós hatásától már eltekintünk. Azaz az „eltolási áramokat” elhanyagoljuk. Így az alapegyenletek a következők:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}^{SZ}(\vec{r}, t)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

5.) Az elektromágneses terek teljeskörű viselkedését a 4db Maxwell egyenlet együttesen adja meg. Az előzőkhöz képest itt **az elektromágneses hullámok** megjelenése jelenti a többletet.

A továbbiakban mi is ezt a tárgyalási sorrendet követjük.

Elektrosztatika

Mint azt említettük, az elektrosztatikus teret álló töltések rendszere hozza létre. A rotáció mentes elektromos mező forrása tehát az elektromos töltés. Azaz

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Tudjuk, hogy rotáció mentes erőterben (fizikai mezőben) mindig definiálható egy $\Psi(\vec{r})$ skalár potenciál függvény, amely megadja fizikai mezőt. Jelen esetben tehát

$$\vec{E} = -\nabla\Psi$$

Ezt beírva az első egyenletbe kapjuk az ún. Poisson egyenletet.

$$\Delta\Psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad \text{PE}$$

Tegyük fel, hogy a $\Psi(\vec{r})$ potenciált egy olyan „V” térfogatú térrészben keressük, ahol nincsen töltés ($\rho=0$) és amelyet a „ Γ ” felület határol. Ekkor az ún. Laplace egyenlethez jutunk

$$\{\Delta\Psi = 0\}_{V(\Gamma)}$$

Röviden azonban csak azt írjuk, hogy:

$$\Delta\Psi = 0$$

A feladatunk most a **Laplace egyenlet** megoldása. Tudjuk azt, hogy az elektrosztatikus tér forrása mindig elektromos töltések valamilyen elrendeződése. Most azonban ebből „semmit nem látunk”, hiszen töltések szükségképpen a vizsgált térrészen kívül helyezkednek el. Természetesen a teret gerjesztő töltsek hatását valahogyan figyelembe kell vennünk. A matematikai vizsgálódások arra az eredményre vezettek, hogy a „V” térfogat belsejében a Laplace egyenlet mindig egyértelműen megoldható. Ehhez azonban szükség van az ún. „peremfeltételek” ismeretére. Ez azt jelenti, hogy a térfogat határán (a teljes „ Γ ” zárt felületen) ismernünk kell vagy a $\Psi(\vec{r})$ potenciál értékét



$$\Psi(\Gamma);$$

vagy a gradiens értékét

$$\nabla\Psi(\Gamma),$$

vagy vegyesen a felület mentén hol ezt, hol azt.

$$\Psi(\Gamma_1) \text{ és } \nabla\Psi(\Gamma_2) \text{ ahol } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

	
Pierre Simon Laplace, (1749-1827)	Simeon Denis Poisson: (1781-1840)

Az iménti állítás könnyen elhithető, hiszen a teret gerjesztő töltések a „ Γ ” felületen is meghatározzák az elektrosztatikus teret. Így a „peremfeltételek” megadása a „burkoltan” a töltés elrendeződés megadását jelenti.

A Laplace egyenlet megoldása során érdemes „alkalmazkodni” a zárt felület alakjához. Ez legtöbbször a koordináta rendszer alkalmas megválasztásával történik. Például, ha egy kocka alakú felületen adjuk meg a peremfeltételeket, akkor célszerű Descartes koordinátarendszert választanai. Gömbfelület esetén pedig értelem szerűen gömbi koordináták lesznek a „jól viselkedő” változók. A feladatok száma szinte korlátlan, ezért ezek csak amolyan „ésszerű ajánlások” amelyek alkalmazhatóságát mindig a konkrét fizikai probléma dönti el. Amolyan „ökölszabályként” kezelhető.

Az általános „potenciáleméleti” problémák matematikai tárgyalása (ma már) a Vektoranalízis keretei között szokott megtörténni. Ezért itt mi is csak „amolyan” szemléltető bemutatót tartunk a Laplace egyenlet megoldási technikájára. A matematikai finomságokat átengedjük az idevonatkozó matematikai tantárgyaknak. (Pl. parciális differenciálegyenletek.)

A legegyszerűbbel fogjuk kezdeni.

A Laplace egyenlet megoldása Descartes koordinátarendszerben

Tekintsük tehát a $\Delta\Psi = 0$ Laplace egyenlet Descartes koordinátákkal felírt alakját, azaz

$$\Delta_{xyz}\Psi(x, y, z) = 0,$$

ahol

$$\Delta_{xyz} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ez egy ún. (három változós) parciális differenciál egyenlet. A megoldása úgy történik, hogy megpróbáljuk visszavezetni egyváltozós (azaz „közönséges”) differenciálegyenletekre. Ezek megoldása ugyanis viszonylag „egyszerű”. Ennek az eljárásnak a neve „változók szétválasztása” avagy „szeparálás”. Ennek során feltesszük, hogy a keresett függvény előállítható három egyváltozós függvény szorzataként, azaz

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

A feltételezett megoldást beírva a Laplace egyenletbe megnézzük, hogy létezik-e ilyen típusú (szeparált) megoldás. Ha igen, akkor rátérhetünk ezeknek a megkeresésére. Joggal felmerülhet a kérdés, hogy ha megtaláltuk a szeparált megoldást, akkor vajon a feladatunkat is megoldottuk-e. Azaz nem kell-e keresnünk további, nem szeparálható megoldásokat. A válasz a matematika szemével nézve nem triviális és bizonyítást igényel. A Fizika szempontjából azonban nyilvánvaló. A Fizikában használt differenciál egyenletek megoldása mindig egyértelmű. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a megtalált „szeparált megoldás” egyben „**A megoldás**” is. Nem létezik mellette egy „nem szeparálható” fantom.

MEGJEGYZÉS: A differenciálegyenletek matematikai vizsgálata mindig két kérdés feltevésével kezdődik:

- 1.) **Van-e** megoldása az adott típusú differenciálegyenletnek?
- 2.) **Egyértelmű-e** ez a megoldás?

A Matematikában a differenciálegyenletek elméletének a megalkotása során tételek sokaságát dolgozták ki, amelyek segítségével e fenti két kérdésre válaszolni tudunk. Ezek az ún. „**egzisztencia** tételek” (1. kérdés) és az ún. „**unicitási** tételek” (2. kérdés). A stratégia nyilvánvaló. Hiszen, ha nem létezik megoldása az egyenletnek, akkor kár keresni azt. Ha pedig a kapott megoldás nem egyértelmű, akkor még továbbiakat is keresni kell, ráadásul nem tudni, hogy hányat. Azaz a feladatra soha nem mondhatjuk, hogy „megoldottuk”. Ezért aztán nyilvánvaló, hogy mindenki számára a „kétigenes” differenciálegyenlet a megnyugtató. A Fizikában, a dolog lényegéből fakadóan, a helyzet nem ennyire bonyolult. Ugyanis, ha a szóban forgó differenciálegyenlet a vizsgált jelenségnek egy adekvát matematikai modellje (márpedig az, hiszen azért „csináltuk meg”), akkor a válasz csakis „**kétigenes**” lehet. Hiszen biztosan létezik megoldás, mert a jelenséget tapasztaltuk. Valamint csak is egy megoldás lehetséges, hiszen a mi Univerzumunk olyan, hogy „egy időben, a térnek egy pontjában egy mérhető fizikai mennyiségnek csak egyféle értéke lehet”. Ez egy elemi tapasztalati tény és ha ez nem így volna, akkor annak a biológiában „látványos” evolúciós nyomai is lennének. Például az élőlények érzékszervei is alkalmazkodtak volna az „Univerzum kettős életéhez”. Ennek azonban semmi jelle!

Helyettesítsük be a feltételezett „szeparált” megoldást az egyenletbe. Az $\{X(x), Y(y), Z(z)\}$ egyváltozós függvények saját változói szerinti deriváltjait rendre $\{X'', Y'', Z''\}$ -vel fogjuk jelölni. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0 \quad \cdot \left| \frac{1}{XYZ} \right.$$

Osszuk el az egyenletet $\Psi = XYZ$ -vel! Ekkor adódik a következő

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Itt valójában három darab különböző és egyben különböző változójú függvény összege látható. Hiszen az első tag csak az „x” a második csak az „y” és a harmadik tag csak a „z” változótól függ. Ezek a változók (Descartes hely koordináták) egymástól függetlenek, hiszen a megoldást a tér tetszőleges (x, y, z) pontjában keressük. Márpedig az könnyen belátható, hogy három független változójú függvény összege akkor és csakis akkor lehet állandó, ha mindegyik függvény külön-külön állandó. Ezeket az állandókat „szeparációs állandóknak” nevezzük. Jelen esetben:

$$\text{állandó} + \text{állandó} + \text{állandó} = 0$$

Ez nyilvánvalóan csak akkor állhat fenn, ha az egyik tag előjele más mint a másik kettőé. Azaz például

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$$

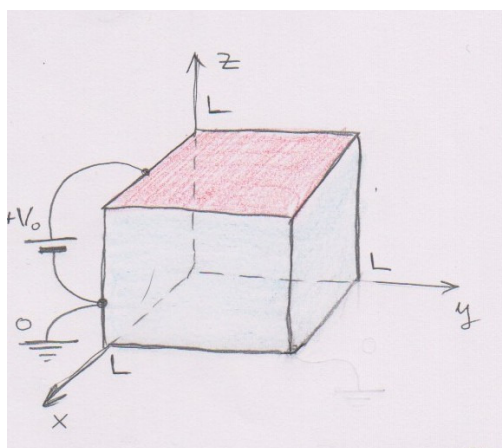
$$\frac{Z''}{Z} = +\alpha^2$$

És ezért

$$k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2 = 0$$

Természetesen az „ $+\alpha^2$ ” bármelyik függvényhez rendelhető lenne. Az, hogy melyikhez kell azt a peremfeltételek döntenek el.

Ennek szemléltetésére célszerű egy konkrét fizika feladatot nézni. Legyen egy „L” oldalú, kocka alakú fémdoboz. A doboz teteje legyen elszigetelve a doboztól. A fedőn az elektromos potenciál legyen V_0 , a dobozon zérus értékű. Ha a „z” a függőleges irány, akkor éppen a fenti konstans választás lesz a helyes. Ugyanis az „x” és az „y” irányokban ugyanazt a peremfeltételt kell teljesíteni, míg a „z” irányban egy másikat.



3.ábra

A doboz potenciál:

$$\Psi(x, y, z) = 0 \quad \text{ha} \quad \begin{cases} x = 0 \text{ és } x = L \\ y = 0 \text{ és } y = L \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{P123}$$

$$\Psi(x, y, z) = V_0 \quad \text{ha} \quad z = L \quad \text{P4}$$

Az általános megoldásokban szereplő szabad paramétereket tehát úgy kell megválasztanunk, hogy ezek a feltételek kielégüljenek. Az általános megoldások tehát a következők:

Tekintsük az első egyenletet, azaz

$$X'' = -k_x^2 X$$

Ennek általános megoldása közismert (a mechanikában is sokat használtuk csak „t” változóval!)

$$X = a \cdot \sin(k_x x) + b \cdot \cos(k_x x)$$

Alkalmazzuk az idevonatkozó megadott peremfeltételeket

$$[\Psi(x, y, z)]_{x=0} = \Psi(0, y, z) = X(0) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = 0$$

$$[\Psi(x, y, z)]_{x=L} = \Psi(L, y, z) = X(L) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = 0$$

Láthatóan ezek akkor teljesülnek, ha

$$X(0) = X(L) = 0$$

Az első feltételből következik, hogy

$$X(0) = a \cdot \sin(k_x \cdot 0) + b \cdot \cos(k_x \cdot 0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0 \quad \text{azaz} \quad b = 0$$

A második feltételből kapjuk, hogy:

$$X(L) = a \cdot \sin(k_x \cdot L) = 0$$

Ez akkor teljesül, ha

$$k_x L = n \cdot \pi, \quad \text{ahol} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots$$

Azaz az ismeretlen k_x -re az adódik, hogy:

$$k_x = \frac{\pi}{L} n$$

És ezért

$$X(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right),$$

Ahol elvileg $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots$. De ha egy adott „+n” érték helyére „-n” értéket írunk, akkor (-1) kiemelhető szinuszos függvényből és az „a”-t „-a”-ra változtatja. De ezt az előjelet „beolvaszthatjuk” magába az „a” konstansba. Így az $n < 0$ -k nem jelentenek újabb fizikai megoldásokat, azaz elegendő csak ha

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Mármint ahányféle „n” van, annyi különböző megoldás is van és ezek lineáris kombinációja szintén megoldása lesz az egyenletnek, azaz

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right)$$

A szimmetria miatt a megoldás menete és az eredmény ugyanilyen lesz z „y” irányban is, azaz

$$Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot m \cdot y\right)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A „z” irányban a megoldást a $Z(z)$ függvény adja, azaz

$$Z'' = +\alpha^2 Z$$

Az általános megoldás itt is jól ismert:

$$Z = a \cdot \exp\{+\alpha \cdot z\} + b \cdot \exp\{-\alpha \cdot z\}$$

Ami átírható még

$$Z = a \cdot sh\{\alpha \cdot z\} + b \cdot ch\{\alpha \cdot z\}$$

(Természetesen az „a,b”-k nem ugyanazok!)

A „Z”-re vonatkozó határfeltétel abból adódik, hogy

$$[\Psi(x, y, z)]_{z=0} = \Psi(x, y, 0) = X(x)Y(y)Z(0) = 0$$

Azaz

$$Z(0) = 0$$

És így:

$$Z(0) = a \cdot sh\{\alpha \cdot 0\} + b \cdot ch\{\alpha \cdot 0\} = 0$$

Azaz

$$Z(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b = 0$$

Ezért tehát a megoldás

$$Z(z) = a \cdot sh\{\alpha \cdot z\}$$

Teljesülnie kell még a szeparálás során kapott összefüggésnek is:

$$\alpha^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Azaz

$$\alpha = \frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2}$$

Ez az összefüggés összeköti a három függvényt is. Azaz az általános megoldás (az első három .. **P123** peremfeltétel kielégítése után) könnyen felírható.

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cdot sh\left\{\frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2} \cdot z\right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} n \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m \cdot y\right)$$

Az ismeretlen $\{a_{nm}\}$ együtthatók a negyedik (**P4**) peremfeltétel kielégítésével kaphatjuk meg.

Azaz

$$[\Psi(x, y, z)]_{z=L} = \Psi(x, y, L) = V_0$$

Ezért aztán írható, hogy

$$\Psi(x, y, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cdot sh\left\{\frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2} \cdot L\right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} n \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m \cdot y\right) = V_0$$

Célszerű lesz egy új jelölést bevezetni, nevezetesen:

$$A_{nm} \equiv a_{nm} \cdot sh\left\{\pi \sqrt{n^2 + m^2}\right\}$$

Ekkor a Ψ a következő alakot veszi fel:

$$\Psi(x, y, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} n \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m \cdot y\right) = V_0$$

Ebből az összefüggésből kell az ismeretlen $\{A_{nm}\}$ együtthatókat meghatározni.

Ez elkövetkező Elméleti Fizika tanulmányainkban ilyenfajta feladattal igen gyakran találkozunk majd. Nyugodtan állíthatjuk, hogy ez egy igen tipikus probléma, amelynek a megoldása mindig ugyanazzal a módszerrel történik. Ennek az alapja pedig bizonyos függvényrendszerek igen általános matematikai tulajdonságában gyökerezik. Ennek a neve a „függvények ortogonalitása”. Az evvel a tulajdonsággal rendelkező függvények halmazát „ortogonális függvényrendszernek” nevezzük. Ez tulajdonképpen egy absztrakt, lineáris (vektor) tér egy lehetséges megvalósítása.

Röviden a következőről van szó.

Tekintsük egyváltozós függvényeknek egy halmazát :

$$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots\}$$

Ezek mindegyike az

$$a \leq x \leq b$$

Tartományban van értelmezve és a határokon eleget tesz ugyanannak a peremfeltételnek. Természetesen az „ $a \rightarrow -\infty$ ” és „ $b \rightarrow +\infty$ ” is megengedett. Mármost akkor az $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ függvényhalmaz akkor lesz egy „ortogonális függvényrendszert”, ha teljesül e következő

$$I_{nm} = \int_a^b f_n(x) \cdot f_m(x) dx = g(n, m) \cdot \delta_{nm}$$

Látható tehát, hogy ez az I_{nm} integrál mindig zérus, ha $n \neq m$. Emiatt az integrál neve a két függvény „skalár szozata”. (Szemléletes utalás a vektorok ortogonalitására). Erre bevezetünk egy jelölést:

$$(f_n, f_m) \equiv \int_a^b f_n(x) \cdot f_m(x) dx = g(n, m) \cdot \delta_{nm}$$

Könnyen belátható, hogy a $\sin(x)$ és a $\cos(x)$ függvények ortogonális függvényrendszert alkotnak, ugyanis a matematika szerint:

$$(\sin[knx], \sin[kmx]) = \int_0^a \sin[knx] \cdot \sin[kmx] dx = \frac{1}{2} a \cdot \delta_{nm} \quad \text{OT1}$$

$$(\cos[knx], \cos[kmx]) = \int_0^a \cos[knx] \cdot \cos[kmx] dx = \frac{1}{2} a \cdot \delta_{nm}$$

Ahol $k = \frac{\pi}{a}$

Ezekkel már találkoztunk a „Fourier transzformáció” kapcsán, csak éppen a „t” időskálán.

A feladat tehát a potenciálfüggvény általános alakjában szereplő azon $\{A_{nm}\}$ együtthatók meghatározása, amelyek esetén az utolsó (negyedik) peremfeltétel is teljesül. Azaz

$$\Psi(x, y, L) = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} n' \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m' \cdot y\right) = V_0$$

(Most a későbbiek miatt a szummázó indexeket átírtuk n' -re és m' -re.) Szorozzuk be az előbb definiált skalár szorzással mind a két oldalt a „ $\sin(kn \cdot x)$ ” függvényvel. Természetesen a feladatunknak megfelelően most az kell, hogy

$$a \equiv L \text{ és}$$

$$k = \frac{\pi}{L}$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$\sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m' \cdot y\right) \cdot (\sin[kn'x], \sin[knx]) = (V_0, \sin[knx])$$

Az OT1 ortogonalitási tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m' \cdot y\right) \cdot \frac{L}{2} \delta_{n'n} = \sum_{m'=1}^{\infty} A_{nm'} \sin\left(\frac{\pi}{L} m' \cdot y\right) \cdot \frac{L}{2} = (V_0, \sin[knx])$$

A jobboldali integrálás t elvégezve kapjuk, hogy:

$$(V_0, \sin[knx]) = \int_0^L V_0 \cdot \sin[knx] \cdot dx = V_0 \cdot \left[-\frac{1}{kn} \cos[knx] \right]_0^L = V_0 \cdot \frac{L}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

Azaz

$$\sum_{m'=1}^{\infty} A_{nm'} \sin(km' \cdot y) = V_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

Ezután az egyenletet „ $\sin(km \cdot y)$ ” függvényvel skalárisan beszorozva ez előzőekhez hasonló módon kapjuk, hogy:

$$A_{nm} = V_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \frac{2}{\pi \cdot m} [1 - \cos(n\pi)] \cdot [1 - \cos(m\pi)]$$

Látszik, hogy minden olyan A_{nm} nulla, amelyikben valamelyik index páros szám.

Végül is kapjuk tehát, hogy:

$$A_{nm} = V_0 \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n \cdot m}, \text{ ahol } \{n, m | \text{páratlan}\}$$

Vegyük elő az A_{nm} definíciós egyenletét

$$A_{nm} \equiv a_{nm} \cdot \text{sh}\{\pi\sqrt{n^2 + m^2}\}$$

ezzel adódik, hogy :

$$a_{nm} = \frac{A_{nm}}{\text{sh}\{\pi\sqrt{n^2 + m^2}\}},$$

azaz

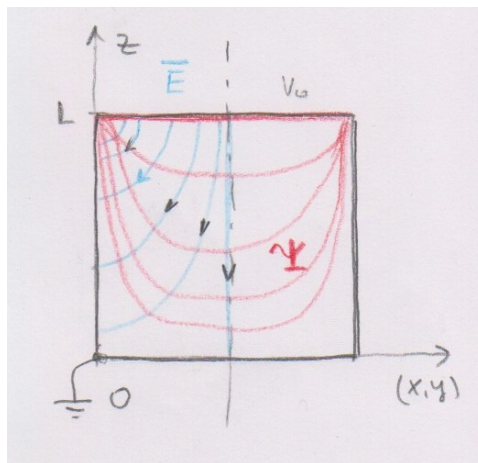
$$a_{nm} = V_0 \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{n \cdot m \cdot \text{sh}\{\pi\sqrt{n^2 + m^2}\}}$$

És így a végeredmény:

$$\Psi(x, y, z) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{nm} \cdot \frac{\text{sh}\left\{\frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2} \cdot z\right\}}{\text{sh}\{\pi\sqrt{n^2 + m^2}\}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} n \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} m \cdot y\right)$$

Ezzel a feladatunkat megoldottuk. A keresett potenciálfüggvényt sikerült végtelen sorösszeg formájában megkapnunk. A numerikus eredmények ennek az adott pontosságú kiszámítása fogja nyújtani.

A várható megoldás az alábbi ábrán látható.



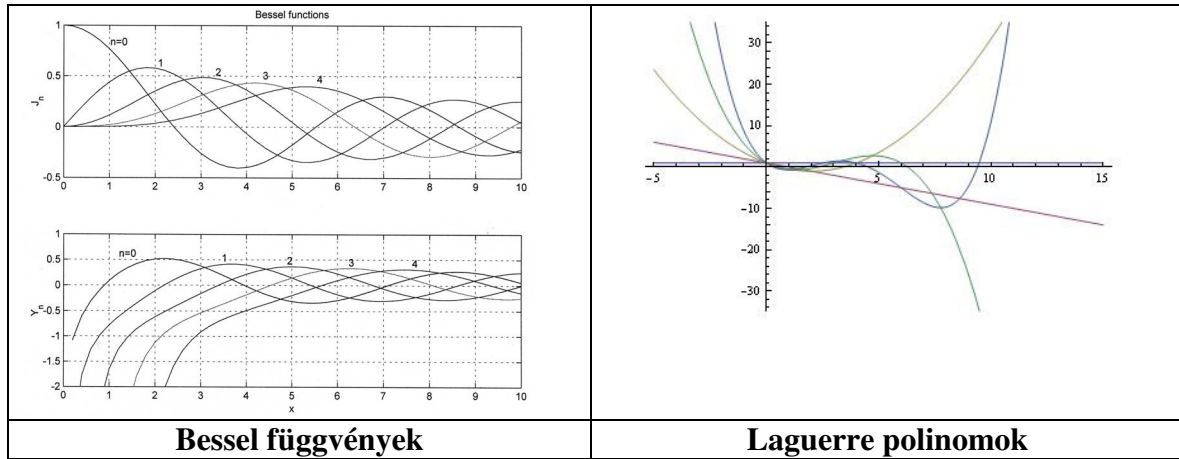
4.ábra

A most tárgyalt peremérték feladat viszonylag egyszerű volt, hiszen a megoldás során csak jól ismert szög függvényeket illetve hiperbolikus függvényeket használtunk. A következőkben „**speciális függvényekkel**” dolgozunk majd. Az elnevezés csalóka. Megkérdezhetnénk ugyanis, hogy mennyiben „speciálisak” ezek a függvények. A válasz egyértelmű: „Semmivel sem speciálisabbak, mint az eddigiek!”. Legfeljebb más a nevük és más a függvény alakjuk. Azért nevezzük mégis „speciálisnak”, hogy megkülönböztessük őket az **eddig megszokott** „hatvány-, szög-, exponenciális-, logaritmus-, hiperbolikus-, függvényektől. Mindegyik felsorolt függvénytípus egyfajta igen egyszerű közönséges differenciálegyenlet „megoldásaként látta meg a napvilágot”.

Vannak azonban bonyolultabb közönséges differenciálegyenletek is amelyek igen gyakran szerepelnek a fizikai modelljeinkben.

Ezeknek a megoldásait ugyanúgy megnevezzük és ábrázoljuk, mint pl. a „ $\sin(x)$ ”-t.

A fizikai tanulmányaink során a leggyakrabban a következő nevekkel találkozunk majd : „**Legendre** polinomok”, „**Laguerre** polinomok”, „**Bessel** függvények”, stb . (Kiejtésük: „*lössandr, lager, besszel*”.) Ezek mindegyike egy-egy jól definiált függvényt jelent, amelyeknek a rajzolata a matematika könyvekben megtalálható és adott pontbeli értékeit táblázatból kikereshetjük. Ugyanúgy, mint azt a „ $\sin(x)$ ” esetén tennénk.



A Laplace egyenlet polárkoordinátás megoldása máris szolgáltat egy „speciális függvény” családot. Ismerkedjünk meg tehát a Legendre polinomokkal!

A Laplace egyenlet megoldása gömbi koordinátarendszerben

A feladatunk tehát a $\Delta\Psi = 0$ Laplace egyenlet megoldása gömbi koordináta rendszerben.

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi}\Psi(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

Ehhez tudnunk kell a Laplace operátor polár koordinátás alakját. Fellapozva a matematika könyvek idevonatkozó oldalait, azt találjuk, hogy

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi} = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta,\varphi}$$

ahol

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad \text{és}$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Az első pillanatra meglehetősen bonyolultnak tűnő matematikai alakzatokat látunk. A megoldás menete ugyanaz, mint az előbb, a sokkal egyszerűbb Descartes esetben volt. A megoldást szeparált alakban keressük.

Azaz

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi),$$

majd tovább:

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

Először az „ $R(r)$ ” sugártól és a „ $Y(\vartheta, \varphi)$ ” szögektől függő részeket fogjuk szétválasztani. Írjuk be ezt a szeparált $\Psi = R \cdot Y$ függvényt az egyenletünkbe! Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \right) R \cdot Y = 0,$$

azaz

$$Y \Delta_r R + \frac{R}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} Y = 0 \quad \left| \cdot \frac{r^2}{R \cdot Y} \right.$$

Osszuk el az egyenletet a „ $\Psi = R \cdot Y$ ” -al és szorozzuk „ r^2 ”-el. Adódik, hogy

$$\frac{r^2}{R} \Delta_r R + \frac{1}{Y} \Delta_{\vartheta, \varphi} Y = 0$$

Láthatóan, az első tag csak az r , a második tag pedig csak a $\{\vartheta, \varphi\}$ szögek függvénye. A Laplace egyenletnek a tér minden pontjában, azaz minden $\{r, \vartheta, \varphi\}$ értéknél teljesülnie kell. Mivel a változók függetlenek egymástól, azért ez csak úgy lehetséges, ha mind a két tag külön-külön állandó, amelyek összege nulla pl: „ $+A - A = 0$ ”. Ekkor kapjuk, hogy

$$r^2 \Delta_r R - AR = 0 \quad \text{REGY}$$

és

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} Y + AY = 0$$

Az első egyenlet már egy „közönséges differenciálegyenlet”, amely megoldható (ha másként nem is de numerikus módszerrel biztosan.) A második egyenlet szeparálása következik.

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

$$\Phi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + A \Theta \Phi = 0 \quad \left| \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\Theta \Phi} \right.$$

A szokásos „beszorzás” után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Theta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + A \sin^2 \vartheta + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

A helyzet most is ugyanaz, mint eddig volt. Azaz két független változójú függvény összege látható az egyenlet baloldalán. Jelöljük az új szeparációs állandót „ m^2 ”-el. Ennek a „fura” jelölésnek az oka később nyilvánvaló lesz. Ezzel megkaptuk a két szeparált egyenletet, nevezetesen

$$\frac{1}{\Theta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + A \sin^2 \vartheta = m^2$$

valamint

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2$$

Ez utóbbi az egyszerűbb, hiszen

$$\Phi'' = -m^2 \Phi$$

Ennek általános megoldása már jól ismert

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} c_0 \varphi + d_0, & \text{ha } m = 0 \\ c_m \sin(m \varphi) + d_m \cos(m \varphi) & \text{ha } m \neq 0 \end{cases}$$

FEGY

Térjünk át a másik egyenletre

$$\frac{1}{\Theta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + A \sin^2 \vartheta = m^2 \quad \left| \frac{\Theta}{\sin^2 \vartheta} \right.$$

azaz

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

Felismerhetőbb alakot ölt az egyenletünk, ha új változót vezetünk be a következő definícióval
 $x = \cos \vartheta$

Némi egyszerű algebrai művelet elvégzése után („Házi Feladat”) a következőkre jutunk:

$$(1-x^2) \cdot \Theta'' - 2x \cdot \Theta' + \left(A - \frac{m_l^2}{1-x^2} \right) \cdot \Theta = 0$$

Ez az ún. „Legendre-féle” differenciálegyenlet (helyesebben annak ún. „kapcsolt” v. „asszociált” változata).

Legendre polinomok	Adrien-Marie Legendre 1752-1833

MEGJEGYZÉS: Az egyenlet megoldása ún. **polinom módszerrel** történik. Mivel ez általában minden esetben célra vezet ezért röviden ismertetjük a módszer lényegét. Olyan egyenleten mutatjuk be, amelynek megoldása közismert. Így csak magára a számítási eljárásra tudunk koncentrálni.

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{DE}$$

Ahol ω^2 egy állandó.

A megoldást egy Taylor sor (ebből lesz esetleg a végén egy polinom) alakjában keressük, azaz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

A deriválás könnyen elvégezhető:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot c_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot c_k x^{k-2}$$

Írjuk be ezt az alakot az egyenletünkbe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot c_k x^{k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \quad \text{SZ1}$$

A első „szumma” a következő képpen indul

$$y'' = 2c_2 x^0 + 6c_3 x^1 + 12c_4 x^2 + \dots$$

Míg a másodikonál nincsen változás, azaz

$$\omega^2 y = \omega^2 c_0 x^0 + \omega^2 c_1 x^1 + \omega^2 c_2 x^2 + \dots$$

Láthatóan a két „szumma” összeadható, azaz az azonos hatványkitevőjű elemek összevonhatók. Ez formálisan könnyen kezelhető alakba írható, ha az y'' -ben végrehajtjuk a szummázó index átnevezését a következő módon:

$$k \rightarrow k+2$$

Ekkor **SZ1** helyett kapjuk, hogy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot c_{k+2} x^k + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)(k+1) \cdot c_{k+2} + \omega^2 \cdot c_k\} x^k = 0$$

Az algebra alaptétele szerint ez akkor teljesül az „ x ” változó minden értékére, ha mindegyik „ x^k ” hatványkifejezés együtthatója azonosan zérus. Azaz

$$(k+2)(k+1) \cdot c_{k+2} + \omega^2 \cdot c_k = 0, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

és ezért

$$c_{k+2} = \frac{-\omega^2}{(k+2)(k+1)} \cdot c_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad \text{RF}$$

Kaptunk egy ún. „rekurziós formulát”. Ez azt jelenti, hogy ha megadjuk a c_0 értékét, akkor abból minden páros indexű konstans kiszámítható és c_1 ismeretében a páratlan indexű együtthatók határozhatók meg, azaz

$$c_0 \rightarrow c_2, c_4, c_6, \dots$$

$$c_1 \rightarrow c_3, c_5, c_7, \dots$$

Nyilvánvaló, hogy a c_0 és a c_1 értékét éppen a (a másodrendű közönséges differenciálegyenleteknél fellépő) két kezdeti feltétel határozza meg.

Példaként vegyük azt, hogy

$$c_1 = A$$

$$c_0 = 0$$

Ekkor természetesen

$$c_0 = c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$$

és

$$c_1 = +A$$

$$c_3 = -A \frac{\omega^2}{6}$$

$$c_5 = +A \frac{\omega^2}{6} \frac{\omega^2}{20}$$

Stb...

Tehát a $y(x)$ megoldást egy sorösszeg alakjában kaptuk meg. Ebben az esetben „szerencsénk” van, mert ezt a z összeget fel tudjuk írni másképpen is. Ugyanis tekintsük a $f(x) = B \cdot \sin(\beta \cdot x)$ függvény Taylor sorát

$$f(x) = B \cdot \sin(\beta \cdot x) = B \cdot \left((\beta x)^1 - \frac{1}{3!}(\beta x)^3 + \frac{1}{5!}(\beta x)^5 \pm \dots \pm \frac{1}{n!}(\beta x)^n \mp \dots \right) \quad \text{ahol } n = \text{páratlan}$$

Vegyük két egymás utáni tag hányadosát:

$$\frac{\left(B \cdot \frac{\beta^{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2} \right)}{\left(B \cdot \frac{\beta^n}{n!} x^n \right)} = \frac{\beta^2}{(n+1)(n+2)} x^2$$

Ez pedig pontosan megegyezik a megoldásul kapott **RF** rekurziós összefüggésünkkel a $B=A$ és $\beta = \omega$ értékek esetén. Azaz kaptuk, hogy

$$y(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

Ez pedig valóban a vizsgált **DE** differenciál egyenlet jól ismert megoldása.

A kérdés mármint az, hogy miként lesz **némely differenciálegyenlet** esetében a megoldás egy polinom?

A válasz egy egyszerű **példával** szemléltethető.

Tegyük fel, hogy van **egy másik differenciálegyenletünk**, amelynek rekurziós formulája „majdnem olyan” mint az iménti volt. Azaz legyen ez

$$c_{k+2} = \frac{k(k-1) - \omega^2}{(k+2)(k+1)} \cdot c_k \quad \text{MR}$$

Legyen a kezdeti feltétel (most is) olyan, hogy az a $c_0 = 0$ választásnak felel meg. Tegyük fel, hogy ω^2 értéke éppen akkora, hogy

$$\omega^2 = r(r-1), \quad \text{ahol „r” egy páratlan szám.}$$

Ekkor érdekes helyzet áll elő. Ugyanis azt kapjuk, hogy

$$c_k \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } k \leq r \\ = 0 & \text{ha } k > r \end{cases}$$

Hiszen $k = r$ esetén $c_r \neq 0$ és

$$c_{r+2} = \frac{r(r-1) - r(r-1)}{(r+2)(r+1)} \cdot c_r = 0.$$

Ettől kezdve pedig a rekurzió miatt minden c_k együtttható zérus lesz. Megoldásul adódik tehát, hogy

$$y(x) = \sum_{k=1}^r c_k \cdot x^k \equiv Q_r(x) \quad \text{ahol } k = 1, 3, 5, 7, \dots, r$$

Ez pedig valóban egy polinom. Az ilyen esetekben általában az szokott lenni, hogy ω^2 sem ismert. Azaz meg kell keresnünk ω^2 azon értékeit, amelyek esetén az $y(x)$ megoldás polinom. Ekkor az eredmény az, hogy

$$\omega^2 = r(r-1)$$

$$y(x) = Q_r(x)$$

$$r = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Hangsúlyoznunk kell, hogy ez „csak” egy példa volt. A jogos kérdés persze az, hogy van-e olyan differenciálegyenlet, amelynek a rekurziós összefüggése éppen az imént megadott formula. A választ az Olvasó fantáziájára és kíváncsiságára bízunk!

Tekintsük tehát a Legendre-féle differenciálegyenletet

$$(1-x^2) \cdot \Theta'' - 2x \cdot \Theta' + \left(A - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \cdot \Theta = 0 \quad \text{ahol } -1 \leq x \leq +1$$

Ennek megoldása polinom módszerrel történik. Megmutatható, hogy akkor van véges megoldás az értelmezési tartomány minden „x” pontjában, ha $\Theta(x)$ egy polinom. Azaz végtelen sorösszeg esetén nem!

De polinom megoldást akkor kapunk, ha a rekurziós formula miatt pl. $c_r \neq 0$, de $c_{r+2} = c_{r+4} = \dots = 0$. A tehát helyzet ugyanaz, mint a **MEGJEGYZÉS**-ben szereplő **MR** esetén volt. Nyilvánvaló, hogy az ismeretlen „A” és „m” szeparálási állandók értéke jelen esetben (sem) lehet tetszőleges. Végül is azt kapjuk, hogy akkor lesz a $\Theta(x)$ megoldás polinom, ha

$$A = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

és

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Az $x = \cos \vartheta$ definíciós összefüggéssel visszatérhetünk a ϑ szögváltozóra. Az így kapott megoldások jelölése és a nevük:

$$\Theta(\vartheta) = \begin{cases} P_l(\cos \vartheta) & m = 0 & \text{Legendre polinom} \\ P_l^{|m|}(\cos \vartheta) & m \neq 0 & \text{asszociált Legendre polinom} \end{cases} \quad \text{LPM}$$

MEGJEGYZÉS: Nagyon gyakran az $\{m, l\}$ között fennálló $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ szoros kapcsolata miatt az $m \equiv m_l$ jelölést szoktuk használni. Tipográfiai okokból most ettől eltekintünk.

Nagyon gyakran az $\Phi(\varphi)$ **FEGY** megoldásban szereplő két független szögfüggvény helyett másik kettőt választunk, azaz

$$\{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\} \leftrightarrow \{\exp(+im\varphi), \exp(-im\varphi)\}$$

Nyilvánvaló, hogy a két függvény halmaza egy lineáris transzformációval egymásba átvihető. Így ezek a differenciálegyenlet szempontjából ekvivalensek egymással.

Ezzel $\Psi(\vec{r})$ potenciálfüggvénynek a szögektől függő része a következő elemeket fogja tartalmazni.

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \exp\{im\varphi\} \cdot P_l^{|m_l|}(\cos \vartheta) \quad (l = 0, 1, 2, \dots \text{ és } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

A $\{\vartheta, \varphi\}$ polár szögpárok a gömbfelület egy pontját jelölik ki. Így aztán az $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ függvény a gömbfelület minden pontjához egy számot rendel. Ezért a neve „gömbfüggvény”. Megmutatható, hogy ezek a gömbfüggvények ún. „ortogonális, teljes rendszert alkotnak”. Ennek egyik feltételeként fennáll a következő (súlyozott) ortogonalitási összefüggés:

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{l_1}^{m_1}(\vartheta, \varphi)^* \cdot Y_{l_2}^{m_2}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{l_1, l_2} \cdot \delta_{m_1, m_2}$$

Ez azt jelenti, hogy egy gömbfelületen értelmezett, tetszőleges $F(\vartheta, \varphi)$ függvény (pl a Földünk teljes domborzata) ezen gömbfüggvények rendszerében „sorba fejthető”.

Azaz:

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{l,m} \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

A Laplace egyenlet általános megoldása ezek után könnyen megkonstruálható.

Ehhez azonban még meg kell oldanunk sugártól függő részre vonatkozó **REGY** differenciálegyenletet.

$$r^2 \Delta_r R - AR = 0$$

A $\Theta(\vartheta)$ megoldása során már megkaptuk az „A” integrálási állandó lehetséges értékeit. Ezért írhatjuk, hogy

$$r^2 \Delta_r R_l - l(l+1)R_l = 0 \\ l = 0, 1, 2, \dots$$

Mivel pedig tudjuk, hogy (Isd Matematikai kézikönyvek)

$$\Delta_r R \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR)$$

ezért adódik, hogy

$$r \frac{d^2}{dr^2} (rR_l) = l(l+1)R_l \quad | \cdot r$$

avagy

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} (rR_l) = l(l+1) \cdot (rR_l)$$

Vezessük be a

$$Q_l \equiv rR_l$$

jelölést! Ezzel a megoldandó egyenletünk a következő alakot ölti

$$r^2 Q_l'' = l(l+1) \cdot Q_l$$

Ez már egészen „barátságosnak” tűnik. Az egyenletből látható, hogy egy olyan függvényt keresünk, amelyet ha kétszer deriválunk akkor az megfelel annak, mintha r^2 -el osztottuk volna. A hatványfüggvény pontosan ilyen! Azaz legyen

$$Q_l(r) = r^k$$

Beírva az egyenletbe adódik, hogy

$$r^2 [k(k-1)r^{k-2}] = l(l+1)r^k$$

Azaz

$$k(k-1)r^k = l(l+1)r^k$$

És ezért

$$k^2 - k - l(l+1) = 0$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+4l+4l^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1+2l)^2}}{2} = \frac{1 \pm (1+2l)}{2} = \begin{cases} l+1 \\ -l \end{cases}$$

Azaz mivel

$$R_l(r) = \frac{1}{r} Q_l(r)$$

Így

$$R_l(r) = \frac{1}{r} Q_l(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{cases}$$

Az egyenlet általános megoldása ezen elemi megoldások lineáris kombinációja lesz, hiszen a Laplace egyenlet lineáris differenciálegyenlet. Tehát

$$R(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right)$$

Nekünk azonban a teljes (szögektől is függő) megoldás kell. Ez nyilvánvalóan a következő lesz

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) \cdot e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \vartheta)$$

Természetesen a $\{a_{lm}, b_{lm}\}$ ismeretlen együtthatókat a peremfeltételek teljesítésével határozzuk meg.

A peremfeltétel azt jelenti, hogy egy zárt „ Γ ” felületen előírjuk a potenciál viselkedését, azaz

$$\Psi(\Gamma_1) = f(\Gamma_1)$$

$$\nabla \Psi(\Gamma_2) = g(\Gamma_2)$$

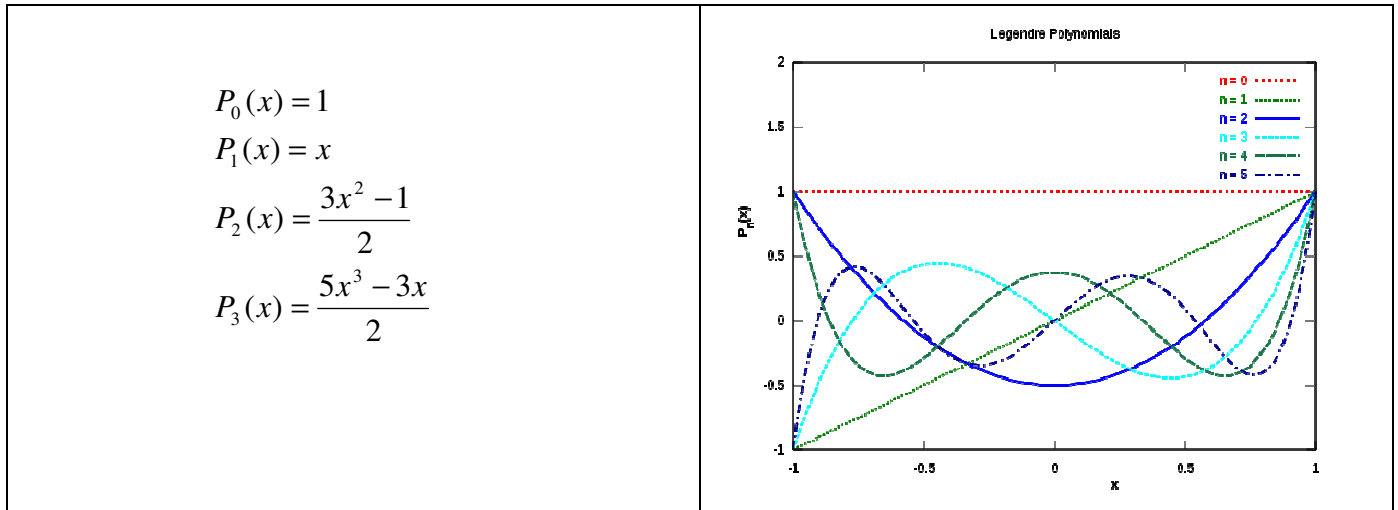
$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Nagyban leegyszerűsödik a matematikai komplikáció, ha hengersizmetrikus problémákkal foglalkozunk. Ez ugyan leszűkíti a vizsgálható jelenségek körét, de a viszonylag egyszerű megoldhatóság didaktikai előnye kárpótol minket.

Mint azt láttuk, hengersizmetrikus esetben a $\Psi(r, \vartheta)$ nem függ a φ szögtől és így az $m = 0$ (minden „l” esetén). Az általános megoldás tehát az **LPM** alapján következő alakba írható:

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

Ahol $P_l(\cos \vartheta)$ a Legendre polinomok. Ezek közül az első pár darab a következő



Ezekre a Legendre polinomokra is érvényes egy ortogonalitási tétel, nevezetesen

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_h(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lh}$$

A kiinduló feladatunk megoldása során láttuk (fémdobozra kapcsolt feszültségforrás), hogy a „ $\sin(mx)$ ” függvényeknél fennálló ortogonalitási tétel felhasználása alapvető fontosságú volt. Hasonló a helyzet a gömbi koordinátás Laplace egyenlet megoldása esetén is. Itt természetesen Legendre polinomokra érvényes fenti összefüggés jut majd döntő szerephez.

A következőkben megvizsgáljuk azt, hogy az eddigi tanulmányainkban megismert (Kísérleti Fizika) hengersizmetrikus elektrosztatikus terek valóban olya szerkezetűek-e, mint azt az iménti általános felírás szolgáltat

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

Példák a Laplace egyenlet megoldására

Ponttöltés tere:

Mint az ismeretes egy „Q” nagyságú ponttöltés elektrosztatikus terét a

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

potenciállal adhatjuk meg (ha a ponttöltés az origóban van és $r \neq 0$).

Nagyon távol a töltéstől

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) = 0$$

Ezért most a potenciál általános alakja

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

A ponttöltés potenciálfüggvényét akkor kapjuk meg, ha

$$b_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

és

$$b_l = 0, \text{ ha } l = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Azaz a ponttöltés potenciálfüggvénye valóban megoldása a $\Delta\Psi = 0$ ($r \neq 0$) Laplace egyenletnek.

Homogén elektrosztatikus mező

A homogén tér skalár potenciálja

$$\Psi = -\vec{E} \cdot \vec{r},$$

hiszen

$$\vec{E} = -\nabla\Psi = +\nabla(\vec{E}\vec{r}) = \vec{E}$$

Legyen az elektromos térerősség „z” irányú, azaz $\vec{E} = (0, 0, E)$. Ekkor

$$\Psi = -E \cdot z$$

Gömbi polár koordinátákkal ez a következőt jelenti

$$\Psi(\vec{r}) = -E \cdot r \cdot \cos(\vartheta)$$

Tekintsük az általános potenciálfüggvényt (homogén a tér, tehát hengerszimmetria van)

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_l \left(a_l \cdot r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

Nyilvánvaló, hogy ebből megkaphatjuk a homogén tér potenciálját, ha

$$a_1 = -E$$

$$a_l = 0 \quad \text{ha } l \neq 1$$

$$b_l = 0 \quad \text{ha } l = 0, 1, 2, \dots$$

Tehát a homogén tér szintén kielégíti a Laplace egyenletet.

Elektromos dipólus tere

Egy $\{q_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ ponttöltésekből álló rendszer ún. „dipólmomentumát” az alábbi módon definiáljuk:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i q_i, \text{ ahol } \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N\} \text{ a ponttöltések helyvektorai.}$$

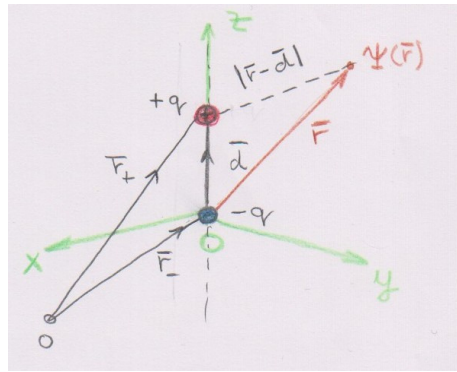
A legegyszerűbb ilyen elrendezés az elektromos dipólus. Ez $+q$ és $-q$ ponttöltésekből áll, amelyek helyvektorait (rendre) \vec{r}_+ -al és az \vec{r}_- -al jelöljük. Ekkor elektromos dipólmomentumra azt kapjuk, hogy

$$\vec{p} = +q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \equiv q \cdot \vec{d},$$

ahol

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{d}.$$

Tehát a \vec{d} a $+q$ töltésnek $-q$ hoz viszonyított helyét adja meg.



5. ábra

Helyezzük a $-q$ töltést az origóba. Ekkor az elektromos potenciál két ponttöltés potenciáljának az összegeként könnyen felírható:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|} - \frac{1}{r} \right) \quad \text{DP}$$

Legyen a $+q$ töltés a „z” tengelyen, azaz $\vec{d} = (0,0,d)$. Ha „ $d \ll r$ ” (azaz elegendően távol vagyunk a dipólustól) akkor adódik, hogy

$$|\vec{r}-\vec{d}| = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \vartheta} \approx r \sqrt{1 - 2\frac{d}{r} \cos \vartheta} \approx r \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2\frac{d}{r} \cos \vartheta \right)$$

Ezt beírva a **DP** egyenletbe kapjuk, hogy

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r \left(1 - \frac{d}{r} \cos \vartheta \right)} - \frac{1}{r} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{r} \cos \vartheta - 1 \right) = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

De tudjuk, hogy

$$qd = \vec{p},$$

Mivel most is teljesül, hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) = 0,$$

ezért a

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

általános alakból kell kiindulnunk. Látható, hogy megkapjuk a dipólus potenciálját, ha

$$b_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{és}$$

$$b_l = 0, \quad \text{ha } l = 0, 2, 3, 4, \dots$$

Ezért aztán írhatjuk, hogy:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos \vartheta)}{r^2}$$

Hiszen tudjuk, hogy

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$$

Tehát a dipólus elektromos terében is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ Laplace egyenlet.

Nagyon gyakran más matematikai formát használunk.

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

Ezek után határozzuk meg az $\vec{E}(\vec{r})$ térerősséget a tér minden pontjában, azaz

$$\vec{E} = -\nabla\Psi$$

Ennek kiszámításakor hasznos az imént bevezetett alak. Használni fogjuk ismét a mechanikában már bevezetett indexelési konvenciót (Einstein). Azaz minden „dupla indexre” összegezni kell.

Így írható, hogy

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{p_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \partial_j \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_j x_j}{(x_k \cdot x_k)^{3/2}}$$

A térerősség pedig

$$E_i = -\partial_i \Psi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \partial_i \left[\frac{p_j x_j}{(x_k \cdot x_k)^{3/2}} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(p_j \cdot \partial_i x_j \cdot \frac{1}{(x_k \cdot x_k)^{3/2}} + p_j x_j \cdot \partial_i \frac{1}{(x_k \cdot x_k)^{3/2}} \right)$$

Itt kihasználtuk azt, hogy a \vec{p} állandó. Elvégezve a kijelölt deriválásokat kapjuk, hogy:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(p_j \delta_{ij} \cdot \frac{1}{(x_k \cdot x_k)^{3/2}} - p_j x_j \cdot \frac{3}{2} \frac{\partial_i (x_k \cdot x_k)}{(x_k \cdot x_k)^{5/2}} \right).$$

Azaz tovább

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(p_i \cdot \frac{1}{r^3} - p_j x_j \cdot 3 \frac{x_k \partial_i x_k}{r^5} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(p_i \cdot \frac{1}{r^3} - p_j x_j \cdot 3 \frac{x_k \delta_{ik}}{r^5} \right)$$

és

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(p_i \cdot \frac{1}{r^3} - p_j x_j \cdot 3 \frac{x_i}{r^5} \right)$$

A kapott végeredmény átírható vektoros alakba a következő képpen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p} \cdot r^2}{r^5}$$

Ne felejtsük el, hogy ez csak akkor igaz, ha a dipólustól elegendően távol vagyunk ($d \ll r$). Mind e mellett azonban a teljes térre is igaz lesz, ha a ponttöltés mintájára bevezetjük a „pontoszerű dipólus” fogalmát.

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q \cdot \vec{d} = \vec{p}$$

Ez a fogalom igen hasznos lesz. Az anyag ugyanis atomokból áll, amelyek rendelkezik(nek) elektromos dipólussal. Hiszen van, hogy az elektron(felhő) töltésközéppontja nem esik egybe a pozitív töltésű atommagéval (molekulák esetén : magokéval). Mivel az atomok mérete sokkalta kisebb minden makroszkópikus méretnél, ezért az atomok (molekulák) pontoszerű elektromos dipólussal jellemezhetők.

Tegyük fel, hogy a $\Psi(\vec{r})$ potenciálfüggvény olyan, hogy a töltésektől elegendően nagy távolságra a következő módon közelíthető

$$\Psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b_l}{r^{l+1}} \right) \cdot P_l(\cos \vartheta) \approx \frac{b_0}{r} P_0(\cos \vartheta) + \frac{b_1}{r^2} P_1(\cos \vartheta)$$

Ez előzőek értelmében ez azt jelenti, hogy elegendően távolról szemlélve a töltésrendszert az egy ponttöltés és egy dipólus együttesével közelíthető. Meg is tudjuk mondani ezen „helyettesítő” elemek nagyságát.

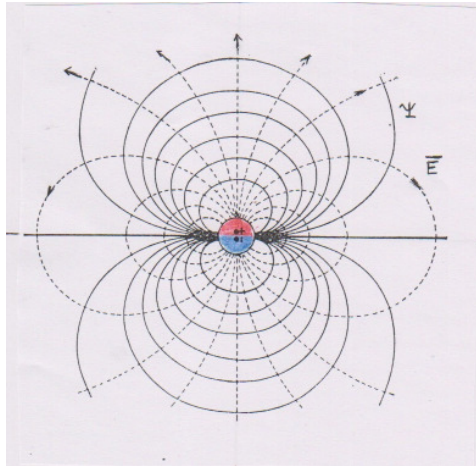
Ez előzőek értelmében ugyanis:

$$Q = b_0 \cdot 4\pi\epsilon_0$$

és

$$p = b_1 \cdot 4\pi\epsilon_0$$

Azt is észrevehetjük, hogy bár a fenti sorösszeg csak hengersizmetrikus esetben igaz, az első két tag tetszőleges töltéselrendezés esetén is ugyanilyen lesz. Hiszen ezt a ponttöltés és a dipólus szimmetriája garantálja.



6.ábra

Az eddigiekből (is) látható, hogy a Laplace egyenlet olyan térrészben adja meg az elektrosztatikus mezőt, ahol nincsenek töltések. Azaz a teret gerjesztő objektumok a vizsgált térfogaton kívül vannak.

Most azt kell megvizsgálnunk, hogy mi a helyzet akkor, ha a vizsgált térrészben töltések is jelen vannak. Azaz az elektrosztatika alapegyenletét jelentő **PE** Poisson egyenlet megoldásával kell foglalkoznunk.

$$\Delta\Psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

A Green függvények használata az elektrosztatikában.

Tudjuk jól, hogy az anyag atomos szerkezetű. Így az elektromos töltések ($\pm q$) hordozói is atomok, molekulák lehetnek. Azt is tudjuk már, hogy az elektromos töltés „kvantált mennyiség”, azaz minden $\pm q$ töltés egy elemi „ e ” töltésegység egész számú többszöröse.

$$\pm q = \pm N \cdot e, \text{ ahol}$$

$$N = 0, 1, 2, \dots \text{ és}$$

$$e = 1.602 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Mivel a Maxwell egyenletek lineárisak, ezért érvényes az **EMT**-re a „szuperpozíció” elve. Ez azt jelenti, hogyha pl. ismerem két ponttöltés elektromos terét külön-külön, akkor meg tudom mondani azt, hogy együttesen milyen elektromos mezőt hoznak létre. Azaz formálisan

$$\text{Ha } q_i \rightarrow \vec{E}_i(\vec{r})$$

$$\text{akkor } \sum_{i=1}^N q_i \rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}),$$

Ez azt jelenti, hogy az alapfeladat egy ponttöltés terének a meghatározása. Természetesen **most** ezt is a Maxwell egyenletek segítségével kell megtennünk. Azaz nem a ponttöltések között fellépő Coulomb erő matematikai kifejezésének a felhasználásával. Mivel a differenciális alapegyenletekben $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűség szerepel ezért a ponttöltést is ebben a „formában” kell használni. Ezt a (térbeli) Dirac-delta

(disztribúció) segítségével tudjuk megtenni. A Lineáris rendszerek analízise során már megismerkedtünk ezzel a fogalommal (legalábbis az időskálán). Számunkra elegendő precizitással megbeszéltük a vele való korrekt matematikai műveletek lehetőségét is. Most ezeket ez ismereteinket fogjuk használni.

Helyezzünk el a tér \vec{r}_0 helyvektorú pontjába egy „Q” ponttöltést. Ekkor térbeli töltéssűrűséget a következő (immáron triviális) módon írhatjuk fel

$$\rho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Hiszen a Dirac deltánál tanultak szellemében

$$\int \rho(\vec{r}) d^3 r = \int Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3 r = Q$$

A ponttöltés **EMT**-t meghatározó Poisson egyenlet ekkor tehát

$$\Delta_{\vec{r}} \Psi(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

A számolás egyszerűsítése végett rögzítsük az origót a ponttöltésünkhöz. Ez nem csorbít semmit az általános vizsgálódásunkon, hiszen a fizikai eredmények nem függhetnek a koordináta-rendszer megválasztásától. Amúgy pedig az eredmény ismeretében, utólag még mindig visszatolhatjuk az origót az eredeti helyére. Ekkor a Poisson egyenlet a következő lesz:

$$\Delta \Psi(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r})$$

A (időfüggetlen) lineáris rendszereknél már foglalkoztunk azzal, hogy ha ismerjük a rendszernek a „válaszát” egy ügyesen megválasztott gerjesztésre, akkor ebből tudni fogjuk azt, hogy miként reagál a rendszer egy tetszőleges hatásra (bementre). Az egyik ilyen „vizsgáló gerjesztés” a Dirac delta volt, a másik a „szinuszos” időfüggésű. Ez utóbbinak a megfelelő matematikai általánosításával jutottunk el a Fourier transzformációhoz. Ennek használata igen hatékony eszköznek bizonyult a „fizikailag értelmes” (nem végtelen nagy energiataralommal rendelkező) gerjesztések esetén. Azt is láttuk, hogy ezek a „vizsgáló” gerjesztések egymásba átszámíthatók, ezért aztán a válaszok között is igen jól definiált kapcsolat van.

A mostani Poisson egyenletünk is egy lineáris egyenlet. A változó azonban most nem a „t” idő paraméter, hanem pl. az (x, y, z) térkoordináták. Természetesen ez a matematikailag nem érdekes, ezért, várhatóan, ugyanazt a technikát alkalmazhatjuk most is mint annakidején.



A Dirac delta gerjesztésre adott „választ”, azaz a kialakult **EMT**-t megadó potenciálfüggvényt most is Green-függvénynek fogjuk nevezni és megtartjuk a $G(\vec{r})$ jelölést is.

Tehát

$$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \quad \text{GF1}$$

A $G(\vec{r})$ ismeretében természetesen a ponttöltés $\Psi_Q(\vec{r})$ potenciálja közvetlenül adódik:

$$\Psi_Q(\vec{r}) \equiv \frac{Q}{\epsilon_0} G(\vec{r})$$

Mindebből azonban több is következik. Ugyanis, ha **GF1** igaz, akkor igaz lesz a következő „eltolt” Poisson egyenlet is

$$\Delta_r G(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Ahol a „változó” továbbra is az \vec{r} vektor és az \vec{r}' az egyenlet szempontjából csak egy „eltolási” paraméter.

Szorozzuk be az egyenletet $\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}$ el, ami érzéketlen a Δ_r operátorra, hiszen nem tartalmazza az \vec{r} változót. Kapjuk, hogy

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\epsilon_0} \cdot G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}')$$

Mind a két oldal elvégezhető egy térfogati integrálás az \vec{r}' paraméter szerint. Ekkor adódik, hogy:

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') d^3 r' \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

A Dirac delta definíciója értelmében az egyenlet baloldalán megjelenik a $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűség, azaz

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') d^3 r' \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho(\vec{r})$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a

$$\Delta \Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Poisson egyenlet értelmében a megoldást a következő „konvolúciós” összefüggéssel tudjuk kiszámítani.

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{GFM}$$

Tehát (hasonlóan az időtartományban tapasztaltakhoz) a $G(\vec{r})$ Green függvény ismeretében tetszőleges $\rho(\vec{r})$ töltéselrendezéshez tartozó $\Psi(\vec{r})$ potenciálfüggvény „egyszerűen” (bár legtöbbször nem kis matematikai munkával) kiszámítható.

A feladatuk tehát $G(\vec{r})$ Green függvény meghatározása. Megpróbálunk, amennyire csak lehetséges támaszkodni az eddig tanultakra. Természetesen lényeges értelmezésbeli eltérések is lesznek, amely az „időskála” és a térkoordináta közötti alapvető különbségből fakad.

Az első rögtön az „idő egyirányúsága” amely azt jelenti, hogy a múltból a jövő felé haladunk de a múltba visszamenni nem tudunk. Ez azt jelenti, hogy csak a múlt van hatással a jelenre, a jövő ezt nem befolyásolja. Ez a „kauzalitás elve”, amelynek tükröződnie kell a fizikai egyenleteinkben is. Láttuk azt, hogy az „időbeli” Green függvény esetében ez azt jelenti, hogy

$$G(t - t') = 0 \quad \text{ha } t' > t, \text{ ahol „}t\text{” a „jelen” időpontot jelöli.}$$

Ugyanez a követelmény természetesen a $G(\vec{r} - \vec{r}')$ „térbeli” Green függvényénél matematikailag is értelmetlen volna, hiszen az \vec{r} és \vec{r}' vektortéren a „rendezési relációt” nem tudjuk definiálni.

Ez fizikailag azt jeleneti, hogy a tér bármely \vec{r}' pontjában lezajló esemény hatással lehet a kiválasztott \vec{r} pontbeli eseményekre. Sőt ez a hatás legtöbbször csak a két pont közötti $\vec{d} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ távolságvektortól függ. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy (a fizikai mező) „a tér homogén”. A tapasztalatok szerint ennél több is igaz, nevezetesen $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = G(d)$. Tehát a Green függvény csak a két pont közötti távolság nagyságától függ. Ebben az esetben (a fizikai mező) a tér „izotróp voltáról” beszélünk.

A másik különbség inkább matematikai jellegű. Ugyanis a $\{t, t'\}$ páros **két** skalár paramétert jelent csak, míg az $\{\vec{r}, \vec{r}'\}$ vektorok összesen **6db** skalár adat megadását igényli.

Ennek megfelelően kell definiálnunk a „térbeli” Dirac deltát is. A legegyszerűbb ezt Descartes koordinátákkal megtenni. Legyen tehát definíció szerűen:

$$\delta(\vec{r}) \equiv \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

Ahol az egyes tényezők matematikailag pontosan úgy viselkednek, mint az időbeli $\delta(t)$.

Láttuk, hogy a Dirac deltát „hagyományos” (reguláris) függvények határértékeként lehet előállítani. Az egyik ilyen, jól ismert forma a következő:

$$\delta(x) \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin Kx}{x} \right]$$

Az időskálán történt vizsgálódásunk során bevezettük a Fourier transzformáció műveletét is.

Ennek során egy (megfelelően jól viselkedő) $f(t)$ időfüggvényt egy $\tilde{F}(\omega)$ frekvencia függvénnyé alakítunk át. Ez a transzformáció lineáris. Matematikailag semmi akadálya annak, hogy a „ t ” időparaméter helyett pl. az „ x ” koordinátát „használjuk”. Természetesen az időbeli Fourier transzformáció eredete jól megfogható és érthető fizikai motivációkon alapult. Nevezetesen a célunk, a már említett „ $\sin(\omega \cdot t)$ ” gerjesztésekre adott válaszfüggvények meghatározásának az igénye volt. Ha felidézzük a lineáris rendszerek analízisének tanultakat, akkor a Fourier transzformációhoz vezető út jellegzetes „mértékűköveit” a következő sémával jellemezhetjük:

$$f(t) \leftrightarrow \exp\{\pm i\omega \cdot t\} \leftrightarrow \tilde{F}(\omega)$$

Ha ezt most „átvisszük” az „ x ” térkoordináta esetére, akkor az „ ω ”-t is ki kell cserélnünk egy másik, „ k ” mennyiségre, amelynek a mértékegysége értelemszerűen $[1/m]$ kell, hogy legyen. Azaz

$$f(x) \leftrightarrow \exp\{\pm ik \cdot x\} \leftrightarrow \tilde{F}(k)$$

Ebben az esetben „térbeli” Fourier transzformációról beszélünk. A „ k ”-t nyugodtan nevezhetjük

„térfrekvenciának” is az „ ω ” körfrekvencia analógiájára. Nyilvánvaló az is, hogy $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ a

„hullámhosszat” adja. Ezek után írhatjuk tehát, hogy

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv \tilde{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

Illetve az inverz transzformáció

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k) \cdot e^{ikx} dk$$

Számítsuk ki a $\delta(x)$ Dirac delta Fourier transzformáltját. Azaz

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{-ikx} dx = \left[e^{-ikx} \right]_{x=0} = e^0 = 1$$

Az eredmény a Dirac delta definíciójából egyértelműen adódott, hiszen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) dx = f(x_0)$$

Az inverz transzformáció is végrehajtható, azaz

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(x)] \cdot e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{ikx} dk$$

A jobboldali (improprius) integrált a szokásos határérték képzéssel számíthatjuk ki:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{ikx} dk =$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, kapjuk, hogy

$$\int_{-K}^K e^{ikx} dk = \left[\frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{-K}^{+K} = 2 \frac{\sin(Kx)}{x}$$

és így

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(Kx)}{x} \right]_{K \rightarrow \infty}$$

Ez pedig valóban a Dirac delta egyik lehetséges megvalósítása.

Ezen matematikai analógián túl azonban könnyen észrevehető a háttérben meghúzódó fizikai tartalom is. Ezt most az elektrosztatika példáján fogjuk értelmezni. Mint azt láttuk, ebben az esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy tetszőleges, időfüggetlen $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűség milyen elektrosztatikus mezőt hoz létre. Ezt a fizikai mezőt a $\Psi(\vec{r})$ sakálár potenciálfüggvénnyel adjuk meg. Tehát joggal mondhatjuk, hogy a $\rho(\vec{r})$ gerjesztésre az elektromágneses tér $\Psi(\vec{r})$ válaszfüggvényt produkál. Ebből aztán az $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Psi(\vec{r})$ elektromos térerősség számolható és egy „q” próbatöltéssel az $\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ kölcsönhatás alapján megmérhető.

Töltéseloszlás → lineáris EMT → potenciálfüggvény

7.ábra

A térbeli Fourier transzformáció használatának az alapja az, hogy pl. $\rho(\vec{r}) = \rho_0 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r})$ töltéssűrűség elektromos terének az ismerete elég ahhoz, hogy tetszőleges töltéssűrűség elektrosztatikus terét kiszámoljuk. Ehhez általánosítani kell módszerünket és a térbeli, háromdimenziós (\vec{r}) komplex Fourier transzformációt kell bevezetnünk. Ezt Descartes koordináták használata esetén a legegyszerűbb. Mivel az $\{x, y, z\}$ koordináták egymástól függetlenek, ezért az egy változóról a háromra való $\{x\} \rightarrow \{x, y, z\}$ áttérés szinte triviális.

Ugyanis a térbeli $\mathcal{F}[f(\vec{r})]$ Fourier transzformáció, három, egymástól független (skalár) Fourier transzformáció egymás utáni alkalmazásával kapható. Azaz szimbolikusan írva:

$$\mathcal{F}[f(\vec{r})] = \mathcal{F}_z \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x [f(\vec{r})]$$

Részletesen kiírva a változókat:

$$\mathcal{F}[f(x, y, z)] = \mathcal{F}_z \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x [f(x, y, z)].$$

Alkalmazva az elmondottakat, adódik, hogy

$$\mathcal{F}_x [f(x, y, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \cdot e^{-ik_x x} dx \equiv \tilde{F}(k_x, y, z)$$

A kapott kifejezés az „y” függvénye, tehát ezen változóra nézve is végrehajthatunk egy transzformációt, azaz

$$\mathcal{F}_y [\tilde{F}(k_x, y, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k_x, y, z) \cdot e^{-ik_y y} dy = \tilde{F}(k_x, k_y, z)$$

Ugyanígy járunk el a „z” változó esetében is:

$$\mathcal{F}_z[\tilde{F}(k_x, k_y, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k_x, k_y, z) \cdot e^{-ik_z z} dz \equiv \tilde{F}(k_x, k_y, k_z) = \tilde{F}(\vec{k})$$

De a három (független) integrál egybe is írható, tehát:

$$\mathcal{F}[f(\vec{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \cdot \exp\{-k_x x - k_y y - k_z z\} dx dy dz$$

Ezzel megkaptuk a végeredményt, amely szerint a térbeli, komplex Fourier transzformáció definíciója a következő lesz:

$$\mathcal{F}[f(\vec{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \cdot \exp\{-\vec{k}\vec{r}\} dx dy dz$$

Alkalmazzuk ezt a térbeli $\delta(\vec{r})$ Dirac deltára! Mivel definíció szerint:

$$\delta(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Így az egydimenziós esetben látottak értelmében:

$$\delta(\vec{r}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x} dk_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y} dk_y \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z z} dk_z$$

Összevonva az integrálásokat azt kapjuk, hogy

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y dk_z$$

Bevezethetjük az „infinitezimális térfogat” fogalmára az alábbi szokásos jelölést:

$$dk_x dk_y dk_z \equiv d^3 k$$

és így írhatjuk, hogy

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3 k$$

Ami a definíciók alapján azt (is) jelenti, hogy

$$\mathcal{F}[\delta(\vec{r})] = 1$$

Mindez felírható a Fourier transzformáció formális alakja szerint is, azaz

$$\mathcal{F}[\delta(\vec{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3 r = e^{-0} = 1$$

Ezzel eljutottuk odáig, hogy a Fourier transzformáció alkalmazásával lehetővé válik a térbeli Green függvény meghatározása. Azaz oldjuk meg a következő Poisson egyenletet.

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

A formailag „egyszerűbb” $\vec{r}' = 0$ esetet véve

$$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$$

Alkalmazzuk a Fourier transzformáció technikáját! Transzformáljuk tehát az egyenletünket

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta G \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3 r = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3 r$$

A Poisson egyenletet, részletesen kiírva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Ezért aztán könnyen képezhető az egyenlet „x” változójú Fourier transzformáltja, azaz:

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] + \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right] + \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right] = -\mathcal{F}_x [\delta(x)] \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

És így

$$-k_x^2 \mathcal{F}_x[G] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{F}_x[G] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{F}_x[G] = -1 \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

Majd hasonlóképpen az „y” változóra

$$-k_x^2 \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x[G] - k_y^2 \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x[G] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x[G] = -\delta(z)$$

És végül \mathcal{F}_z alkalmazásával adódik, hogy

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \mathcal{A}[G] = -1$$

Ez pedig röviden így írható, hogy:

$$-k^2 \cdot \mathcal{A}[G] = -1$$

Majd átrendezés után

$$\mathcal{A}[G] = \frac{1}{k^2}$$

Avagy a szokásos jelöléssel

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2}$$

A keresett Green függvény most már könnyedén legyártható

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y dk_z$$

Az egész „k” térre vett integrálásnál áttérhetünk gömbi koordinátákra úgy, hogy a „z” tengelyt a \vec{k} irányába vesszük fel. Ezzel kapjuk, hogy

$$dk_x dk_y dk_z = k^2 \sin \vartheta dk \cdot d\vartheta \cdot d\varphi,$$

ahol a „ ϑ ” \vec{k} és az \vec{r} vektorok közötti szög. Így tehát

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikr \cos \vartheta} k^2 \sin \vartheta \cdot dk d\vartheta d\varphi$$

A „ φ ” szerinti integrálás triviálisan adódik. A „k” -nál egy határértéket adunk meg $0 \leq k \leq K \rightarrow \infty$. Az így „feldarabolt” integrálás tehát a következő módon írható:

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{k=0}^K \left\{ \int_{\vartheta=0}^{\pi} e^{ikr \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \right\} dk \right] \quad \text{GI}$$

A „ ϑ ” esetén egy változó cserét érdemes alkalmazni, azaz

$$\cos \vartheta = \xi$$

Ezért

$$\sin \vartheta d\vartheta = -d(\cos \vartheta) = -d\xi$$

Így pedig az adódik, hogy

$$\int_0^{\pi} e^{ikr \cdot \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \int_1^{-1} e^{ikr \cdot \xi} (-d\xi)$$

Azaz, elvégezve a kijelölt műveletet kapjuk, hogy:

$$\int_{-1}^{+1} e^{ikr \cdot \xi} d\xi = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{kr} \cdot \sin kr$$

Ez beírható a **GI** integrálba, aminek eredménye képen adódik, hogy

$$G(\vec{r}) = \frac{2\pi}{8\pi^3} \cdot \frac{2}{r} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \frac{\sin kr}{k} dk$$

Matematikai kézikönyvekből kiolvasható, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a \cdot x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ ha } a > 0$$

és ezért

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{4\pi}{8\pi^3} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi r}$$

A feladatunkat ezzel megoldottuk.

Azt szoktuk erre mondani, hogy a „ Δ ” Laplace operátor Green függvénye a következő

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}$$

Azaz a kiinduló definíciós (Poisson) egyenletünk alapján

$$\Delta \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta(\vec{r})$$

Ezt úgy(is) szoktuk írni, hogy

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$$

Alkalmazva egy „ \vec{r}' -vel” történő „eltolást” kapjuk, hogy:

$$\Delta_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

És ezzel tetszőleges $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűség esetén a

$$\Delta \Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Poisson egyenlet megoldása kiszámítható, hiszen a már levezetett összefüggés szerint .

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{GFM}$$

Beírva ide a kapott Green függvényt adódik, hogy

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Az eredmény igen szemléletes és ellenőrizhető. Gyakorlatilag a Coulomb törvény és a szuperpozíció elvnek az együttes alkalmazásáról van szó. Ne felejtsük el azonban azt, hogy most éppen az volt a cél, hogy a Maxwell egyenletek alapján és ne „elemi” úton, azaz Coulomb törvény alkalmazásával kapjuk meg az eredményünket!

Természetesen ezt módszert (mármint a térbeli Fourier transzformációt) a Fizika számtalan területén használhatjuk, amennyiben azt a felállított fizikai modellünk lehetővé teszi (pl linearitás).

Az elektrosztatika egyértelműsége

A Laplace egyenlet megoldásakor már beszéltünk arról, hogy miért várjuk azt, hogy az elektrodinamika egyenletei egyértelmű megoldással rendelkeztek. Az érvelésünk bár spekulatív volt, mégis teljes egészében összhangban állt a természettudományos szemléletünkkel. Mindenesetre az elektrodinamika koherenciáját erősítené, ha az állításunkat egzakt matematikai eszközökkel is bizonyítani tudnánk.

A következőkben ezt fogjuk megtenni. Igaz ugyan, hogy most csak az elektrosztatika esetében adunk egy bizonyítást, de hasonló gondolatmenettel (csak több matematikai fáradsággal) az egész elektrodinamikára is megtehető.

Az állításunkat a következő képpen lehet matematikai nyelven megfogalmazni:

„Ha a Laplace (Poisson) egyenletnek megtaláltuk két $\Psi_1(\vec{r})$ és $\Psi_2(\vec{r})$ megoldását amelyek ugyanazoknak a peremfeltételeknek tesznek eleget (vagy ugyanaz a töltéselrendezés hozza létre az elektromos mezőt), akkor ez a két megoldás egymástól csak egy állandóban térhet el.”

Az állítás bizonyítása a következő:

$$\Delta\Psi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{és} \quad \Delta\Psi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

A peremfeltételek (is) azonosak, tehát

$$\Psi_1(\Gamma) = \Psi_2(\Gamma)$$

Ha kivonjuk egymásból a két Poisson egyenletet, akkor a jobboldal kiesik, hiszen ugyanarról a $\rho(\vec{r})$ töltéseloszlásról van szó.

$$\Delta(\Psi_2 - \Psi_1) = 0$$

Vezessünk be egy új jelölést:

$$\Psi \equiv \Psi_2 - \Psi_1.$$

Ekkor írható, hogy

$$\Delta\Psi = 0;$$

A peremfeltétel pedig így alakul:

$$\Psi(\Gamma) = \Psi_1(\Gamma) - \Psi_2(\Gamma) = 0 \quad \text{PF}$$

A Ψ -re vonatkozó Laplace egyenletet szorozzuk meg magával a Ψ -vel. Ekkor kapjuk, hogy

$$\Psi \cdot \Delta\Psi = 0$$

A vektoranalízis már nagyon sok nevezetes azonosságot felfedezett már, amelyekben a ∇ operátor mindenféle szerepben (gradiens, divergencia rotáció) szerepel. Ilyeneket már használtunk a kontinuum mechanikában is. Ezek matematikai kézikönyvekben megtalálhatók. Többek között megtaláljuk a következő egyenlőséget is:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \Psi) = \vec{a} \cdot \nabla\Psi + \Psi \cdot \nabla\vec{a} \quad \text{VE}$$

Legyen most

$$\vec{a} = \nabla\Psi$$

és így

$$\nabla\vec{a} = \nabla(\nabla\Psi) \equiv \Delta\Psi$$

Ekkor pedig a **VE** egyenletre kapjuk, hogy

$$\nabla(\Psi \cdot \nabla\Psi) = (\nabla\Psi)^2 + \Psi \cdot \Delta\Psi$$

De az előzőek miatt a jobboldal második tagja zérus, azaz

$$\nabla(\Psi \cdot \nabla\Psi) = (\nabla\Psi)^2 \Psi$$

Integráljuk az egyenletünket a kijelölt „ Γ ” felületű „ V ” térfogatra

$$\int_V \nabla(\Psi \cdot \nabla\Psi) dV = \int_V (\nabla\Psi)^2 dV$$

Az egyenlet baloldala felületi integrállá írható át, hiszen tudjuk, hogy egy tetszőleges $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező esetén a

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} d\vec{F} = \int_V (\nabla\vec{v}) dV$$

Ez a vektoranalízisből jól ismert Gauss tétel. Ezt alkalmazva, az egyenletünk baloldala átírható felületi integrálra:

$$\oint_{\Gamma} (\Psi \cdot \nabla\Psi) d\vec{F} = \int_V (\nabla\Psi)^2 dV$$

Azonban tudjuk, hogy (**PF**) a $\Psi(\vec{r})$ függvény a „ Γ ” felületen eltűnik, azaz $\Psi(\Gamma) = 0$. Ezért aztán az egyenlet baloldala zérus és kapjuk, hogy

$$\int_V (\nabla\Psi)^2 dV = 0$$

Az integrál argumentumában egy valós függvény négyzete van, ami biztosan nem lehet sehol negatív, azaz

$$(\nabla\Psi)^2 \geq 0$$

Mivel az egész „ V ” tartományra vett integrál zérus, ez csakis úgy lehetséges, ha itt a

$$(\nabla\Psi)^2 = 0.$$

De ez azt jelenti, hogy

$$\nabla\Psi = 0$$

Azaz a teljes „ V ” térfogatban

$$\Psi = \Psi_0 = \text{állandó}$$

Ami azt jelenti, hogy

$$\Psi_2(\underline{r}) = \Psi_1(\underline{r}) + \Psi_0 \quad (\text{ha } \vec{r} \in V)$$

Pontosan ezt akartuk bizonyítani!

A következő részben egy olyan számítási technikával ismerkedünk meg, amelyik pontosan ezen az „egyértelműségi” tételre alapszik. Segítségével igen hasznos eredményekhez juthatunk. Ennek a neve „elektrosztatikus tükrözés”

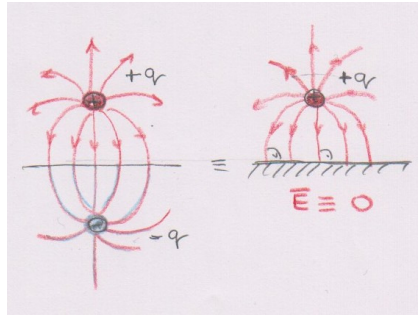
Az „elektrosztatikus tükrözés” módszere. (sík, henger és gömbi tükrözés)

Már középiskolai fizika tanulmányainkban is használtuk a síktükrözést.

A feladat a következő volt: „Egy végtelen nagy vezető sík felett egy „+Q” ponttöltés helyezkedik el. Határozzuk meg az elrendezés elektrosztatikus terét!”.

A feladat megoldása során az alábbi módon okoskodtunk.

Tudjuk azt, hogy a fém belsejében a télerősség zérus és az elektromos „erővonalak” mindig merőlegesek a fém felületére. Ezért az „erővonalképet” (kvalitatíve) most is felrajzolhatjuk.



8.ábra

Ugyancsak felrajzolhatjuk két azonos nagyságú, de ellentétes $\{+Q \text{ és } -Q\}$ töltésből álló dipólus erővonal szerkezetét is.

Az dipólus geometriai szimmetriája miatt az erővonalak tükörszimmetrikusak a két ponttöltést összekötő szakasz felező síkjára. Ezért aztán az erővonalak merőlegesek is erre a síkra. Rögtön észrevehetjük a két rajzolat közötti hasonlóságot, ha a dipólus felező síkját a fémfelületre helyezzük. Azaz a fém feletti térrészben az erővonalaképp ugyanaz, mint a dipólust felező sík (+) töltés felőli oldalán. Azaz a vizsgált térrészben az elektrosztatikus tér ekvivalens lesz az odahelyezett „+Q” töltés és az alsó fél-térbe képzelt, „virtuális” „-Q” töltés eredő terével. Ezzel a feladatunkat „megoldottnak tekintettük”. A virtuális „-Q” töltést tükörtöltésnek nevezzük. Az elnevezés metaforája igen találó.

Természetesen egy kvalitatív hasonlóság még egyáltalán nem bizonyíték, de ezt nem firtattuk.

A most tanultak alapján már egzakt választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy mennyire volt jogos az állításunk, amely az erővonal képek azonosságát mondta ki.

A feladat „átfogalmazása” szinte triviális. A sík feletti térrészt és a dipólus félterét ugyanolyan $R \rightarrow \infty$ sugarú félgömb határolja. Mindkét esetben ugyanazt a peremfeltételt írjuk elő.

Nevezetesen:

$\vec{n} \nabla \Psi = |\nabla \Psi|$, ahol \vec{n} a zárt, félgömb térfogat sík felületének a normálisa és

$\lim_{R \rightarrow \infty} \Psi = 0$, valamint

$\lim_{a \rightarrow 0} \Psi = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a}$, ahol „a” a „+Q” töltést körbevevő kicsiny gömb sugara.

Ezzel azt mondtuk ki, hogy az \vec{E} térerősség merőleges a félgömb térfogat sík lapjára és a végtelenben eltűnik és egy +Q töltés is van a vizsgált térben. Az egyértelműségi tétel kimondja, hogy megadott félgömbön belül a fenti peremfeltételnek csak egyetlen $\Psi(\vec{r})$ potenciálfüggvény felel meg. Ez „nem látja” azt, hogy a fél-teret határoló felületen kívül mi van. Mind a két esetben, a vizsgált térrészben azonos megoldásokat szolgáltat.

Ezen a szemléleten alapszik az ún. „gömbi” és a „henger” tükrözés is.

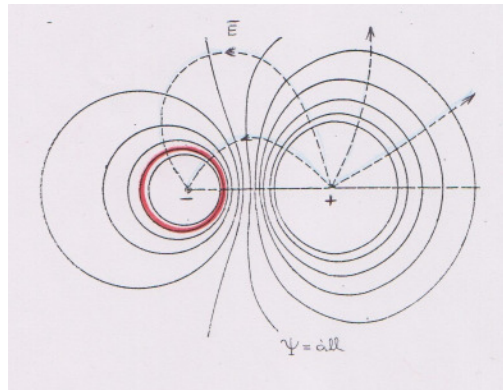
A síktükrözés azon az észrevételen alapult, hogy egy dipólus felező síkja ekvipotenciális felület és egy vezető síkfelület szintén az, ha egy ponttöltés van a közelében. Emiatt lehetett a két felületet azonosnak venni és ezért volt az is, hogy a két különböző elrendezés azonos térrészében ugyanaz a $\Psi(\vec{r})$ potenciál-függvény szolgáltatja az elektromos mezőt.

A sík, a (végtelen hosszú) henger, a gömb igen egyszerű felületek. Matematikai leírásuk is igen könnyű. Ezért aztán érdemes megvizsgálni azt, hogy a gömb és a henger esetén találunk-e valami hasonlót ahhoz, mint amit a síknál tapasztaltunk. Azaz, ha egy dipólus felező síkja ekvipotenciális felület, akkor vajon van-e olyan töltéselrendezés amelynél az ekvipotenciális felület gömb, vagy henger.

A válasz szerencsére az, hogy igen, létezik ilyen töltéselrendeződés.

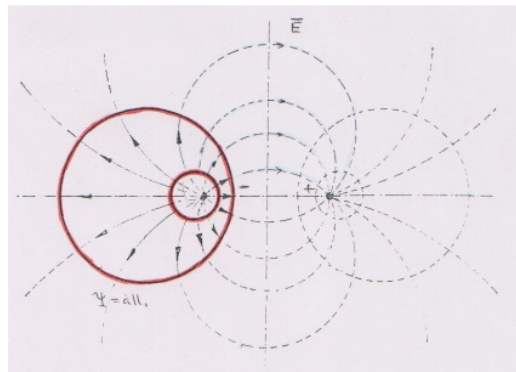
Tudniillik, elgondolkozva a feltett kérdésen az derül ki, hogy

a.) Tetszőleges $+Q_1$ és $-Q_2$ ponttöltések esetén a $\Psi(\vec{r}) = 0$ értékhez tartozó ekvipotenciális felület gömb alakú. Sőt, csupán **csak ez az egyetlen-egy gömb alakú ekvipotenciális felület** létezik



9.ábra

b.) Ha veszünk két párhuzamos, végtelen hosszú, egyenletesen töltött vonalat $+\lambda$ és $-\lambda$ töltéssűrűséggel, akkor itt **minden ekvipotenciális felület henger** alakú lesz. Természetesen a hengerek tengelyei nem esnek egybe.



10. ábra

Ezek után tekintsük a következő feladatot!

Vegyünk egy „ R ” sugarú fémgömböt és a centrumától „ D ” távolságra helyezzünk el egy „ $+Q$ ” ponttöltést! Ekkor fellép a jól ismert „elektromos megosztás” jelensége. Azaz a ponttöltés hatására addig mozognak a töltések a semleges gömbfelületen, amíg az eredő elektromos tér merőleges nem lesz mindenhol a gömb felületére. Ennek az eredményeként a felületnek a $+Q$ ponttöltéshez közelebb eső részén ($-$) negatív, a távolabbi felén ($+$) pozitív t felületi töltéssűrűség alakul ki és az össztöltés továbbra is zérus marad. A vezető gömbfelület természetesen ekvipotenciális lesz. Ennek az értékét jelöljük Ψ_A -val. Ez nem nulla, hiszen a fémgömb a $+Q$ ponttöltés terét csak eltorzította, de újabb töltéseket nem hozott illetve nem távolított el a rendszerből ($\Psi_A \neq 0$).

Mint tudjuk (definíció szerűen) a zérus potenciál a végtelenben van. Ezek után kössük össze gömböt a „végtelennel”! Ez azt jelenti, hogy addig távolítunk el töltéseket a fémgömből, amíg a potenciálja zérus nem lesz. Az így kialakult elrendezésben tehát a fémgömb össztöltése már nem lesz zérus, de a potenciálja igen.

Most lép be a képbe a fenti a.) pontban megfogalmazott állításunk. Ennek értelmében a fémgömbön kívüli tér ekvivalens kell, hogy legyen a $+Q_1$ és $-Q_2$ ponttöltések által létrehozott elektromos térrel. Ahol most, értelemszerűen, a $+Q_1 = +Q$, az általunk elhelyezett „valódi” ponttöltés. A fémgömbön, kialakult felületi töltéssűrűségnek a fémen kívüli tere ekvivalens lesz a gömb belsejébe képzelt $-Q_2$ „virtuális” töltésnek a terével.

A számítások szerint (amit az Olvasóra bízunk) ez akkor következik be, ha a virtuális

$$-Q_2 = -Q', \text{ ahol}$$

$$Q' = Q \cdot \frac{R}{D};$$

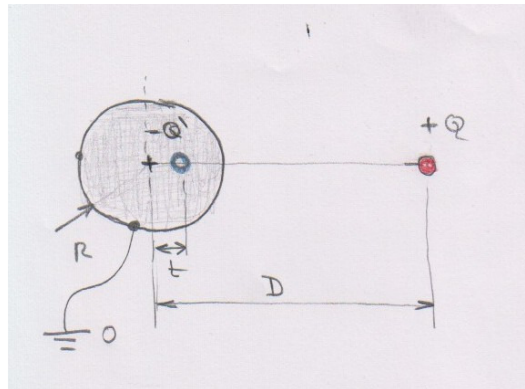
és a $-Q'$ töltés a gömb centrumától

$$t = \frac{R^2}{D}$$

távolságra van. A $-Q'$ töltést „tükörtöltésnek hívjuk. Ezután „hozzuk vissza” a végtelenből az oda eltávolított $+Q'$ töltést. Azért, hogy a gömb továbbra is ekvipotenciális maradjon, ezt a centrumba kell helyezni. Ezáltal a gömb potenciálja a következő lesz

$$\Psi_A = 0 + \left(\frac{+Q'}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 D}$$

Tehát a fémgömbön kívüli tér ekvivalens lesz a $+Q$ ponttöltés és a gömb belsejébe képzelt dipólus terével. Ahol a dipólus egymástól „ t ” távolságra lévő $\pm Q'$ töltésekből áll. Ezzel meghatároztuk a fémgömb és a ponttöltés együttes terét. A most közölt eljárás neve „gömbi tükrözés”.

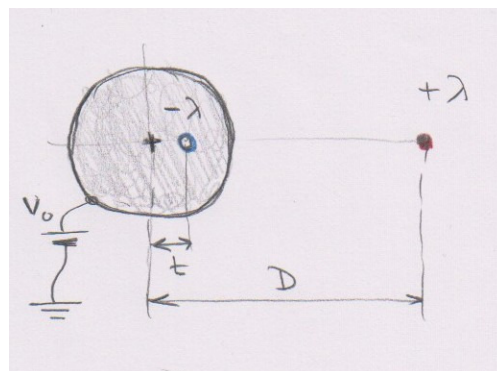


11. ábra

A „hengeres tükrözés” teljesen hasonló az imént elmondottakhoz. Ekkor egy végtelen hosszú „ R ” sugarú fémhenger tengelyétől „ D ” távolságra egy „ $+\lambda$ ” egyenes, végtelen hosszú vonaltöltést helyezünk el. A henger az elektromos megosztás miatt ekvipotenciális lesz. A hengeren kívüli tér ekvivalens lesz a „ $+\lambda$ ” vonaltöltés és a henger tengelyétől „ t ” távolságra elhelyezkedő, virtuális „ $-\lambda$ ” tükör(vonal)töltés együttes terével. A „ t ” távolság nagysága most is

$$t = \frac{R^2}{D};$$

Természetesen, ha a fémhengeren az össztöltés nulla, akkor még el kell helyeznünk egy $+\lambda$ virtuális vonaltöltést is a henger tengelyében. Így a három vonaltöltés (a valódi és a két „virtuális”) együttes hatása adja az elektrosztatikus teret a fémhengeren kívül.



12. ábra

FOLYTATÁSA KÖVETKEZIK !