



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

Fizika Intézet

Fizika Tanszék

Elméleti fizika

Alcím

OROSZ LÁSZLÓ

2009/10

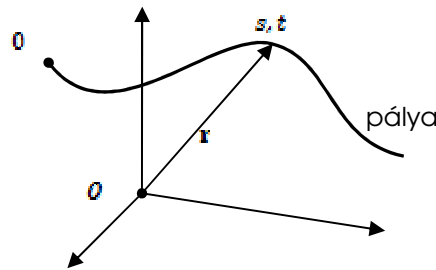
Mechanika

1.1. Egyetlen tömegpont kinematikája

A **kinematika** a mechanikai rendszerek mozgásának a leírásával foglalkozik. A bonyolult rendszerekhez az út az egyetlen tömegpont vizsgálatán keresztül vezet. Ezért első lépésként nekünk is ezzel kell foglalkoznunk.

Egy tömegpont mozgásának az ismerete azt jelenti, hogy tudjuk azt, hogy a pontszerű test egy tetszőleges t időpontban hol van. Mivel egy pont helyét a térben egy \mathbf{r} **helyvektorral** adjuk meg, ezért a fenti kérdésre a választ az $\mathbf{r}(t)$ függvény ismerete jelenti. A tömegpont a mozgása során egy pálya mentén halad. A pálya tehát az a térgörbe, amelyen a tömegpont végigmegy. A matematikában egy térgörbét egy $\mathbf{r}(\lambda)$ függvény ad meg, ahol a λ egy skalár paraméter. λ -t matematikailag igen sokféle módon lehet definiálni. A fizikai szemléletessége miatt a kinematikában mi kétféle paraméterezést használunk.

A $\lambda = s$ esetén az s az a távolság, amelyet a tömegpont egy $s = 0$ kezdőpontból indulva a térgörbén befutott. Természetesen a pálya mentén befutott s távolság és a t idő egymással szoros kapcsolatban van. Az $s(t)$ függvény a pont mozgásának egyik fontos kinematikai jellemzője.



1.1.1. ábra

Időn itt azt a „mennyiséget” kell érteni, amelyet az inerciarendszerben elhelyezett „stopperóra” mér. Ez a praktikus definíció (m.m.: „az idő az, amit az óra mér”) most számunkra egy jó darabig elegendő lesz. Az idő fogalmának precíz kifejtésére csak a speciális relativitáselmélet és a kvantummechanika során kerülhet sor. Filozófiai kérdésekkel ezen tantárgyon belül a szükségesnél többet nem foglalkozunk.

A kinematika feladata, hogy „oda-vissza” meghatározza a következő adatsort:

$$\mathbf{r}(t) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{r}(t).$$

Az idő szerinti deriváltat $\dot{\mathbf{r}}$ -al jelöljük és „ $\dot{\mathbf{r}}$ pont”-nak mondjuk! **Kérjük, hogy ne használja az „ $\dot{\mathbf{r}}$ pötty” kifejezést!** Mint az ismeretes, a Newton-féle mozgástörvény miatt elegendő, ha az $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ gyorsulásvektorig eljutunk. A magasabb rendű deriváltakra csak speciális esetekben lehet szükség.

A legegyszerűbb módszer az, ha felvesszünk egy koordináta-rendszert és abban megadjuk az $\mathbf{r}(t)$ függvény skalár komponenseit, majd „legyártjuk” az idő szerinti deriváltakat. Descartes koordináta-rendszer esetén ez csak az x , y , z skalár komponensek időderiváltjait jelenti. Görbevonalú koordináták esetén a helyzet bonyolultabb. Itt ugyanis az egységvektorok iránya függhet attól, hogy a tér melyik pontjában vagyunk. Ezért aztán a tömegpont mozgása során az egységvektorok idő szerinti deriváltja már nem lesz zérus. Így a formulák meglehetősen „bonyolultak” lesznek.

1.1.1. táblázat

Az 1.1.1. táblázatból kiolvashatók pl. a körmozgás kinematikai adatai. Célszerű henger koordináta-rendszert használni. Történjék a mozgás az XY -síkból lévő O origó centrumú R_0 sugarú körpályán. Azaz most $z = 0$ és $R = R_0 = \text{állandó}$. Ezért kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_R,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = R_0 \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

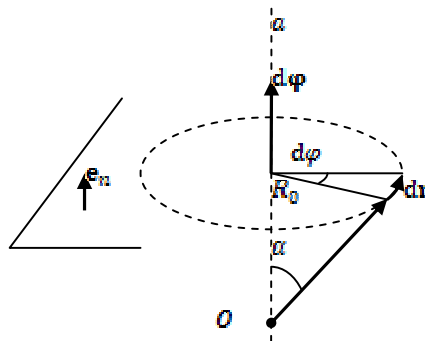
$$\ddot{\mathbf{r}} = -R_0 \dot{\varphi}^2 \cdot \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi \equiv -R_0 \omega^2 \cdot \mathbf{e}_R + R_0 \dot{\omega} \cdot \mathbf{e}_\varphi.$$

Bevezettük az $\omega = \dot{\varphi}$ **szögsebesség** fogalmát és a pont $\mathbf{v} = R_0 \omega$ (**pályamenti sebességét**). A formulánkban természetesen „automatikusan” megjelent a **centripetális gyorsulás** is:

$$a_{cp} = -R_0 \omega^2 = -\frac{v^2}{R_0}.$$

A későbbiek során (főleg a kiterjedt testek forgómozgásának a tanulmányozásakor) igen hasznos lesz egy új fogalomnak, az ω **szögsebesség-vektornak** a bevezetése. Ez az imént használt ω szögsebesség fogalmának az általánosítása. Erre azért van szükség, mert valójában a körmozgás is egy térbeli pályán történik, de eddig a koordináta-rendszert úgy vettük fel, hogy a körpálya az XY -síkból legyen. Azaz z mindvégig 0 volt. (Az egyszerűség végett az origót a körpálya centrumába helyeztük.)

Az általánosításnak a módja az, hogy a körmozgást jellemző két fontos információt, nevezetesen az ω szögsebességet és a mozgás síkjának a térbeli helyzetét egyetlen fogalomban egyesítjük. Tudjuk, hogy egy sík helyzetét a (síkra merőleges) \mathbf{e}_n normális egységvektorral szoktuk megadni. Ezért az $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_n$ módon definiált szögsebesség-vektor jó fogalomnak tűnik. A következőkben ezt fogjuk belátni.



1.1.2. ábra

Tekintsünk egy \mathbf{e}_n helyzetű síkot. Az ebben vizsgálandó R_0 sugarú körmozgás forgástengelye legyen a (1.1.2. ábra). Bevezethető a $d\varphi$ (infinitesimalis) elfordulás-vektor, amely az a tengellyel párhuzamos, nagysága a tengely körüli elfordulás $d\varphi$ szöge és iránya olyan, hogy a $d\varphi$ elfordulás irányát jobbkéz-szabály alapján határozza meg. A tömegpont helyzetét (alkalmazkodva a „térbeli” leíráshoz de matematikai egyszerűségekre is törekedve) az a tengelyen felvett tetszőleges O pontból mért \mathbf{r} helyvektorral adjuk meg. A tömegpontnak a körpályája menti $d\mathbf{r}$ elmozdulását elemi módon megkaphatjuk:

$$d\mathbf{r} = R_0 \cdot d\varphi.$$

Ugyanakkor látható, hogy $R_0 = r \sin \alpha$, ezért

$$d\mathbf{r} = r \cdot d\varphi \cdot \sin \alpha.$$

Így aztán a pont $d\mathbf{r}$ elmozdulás-vektora úgy írható, hogy:

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}.$$

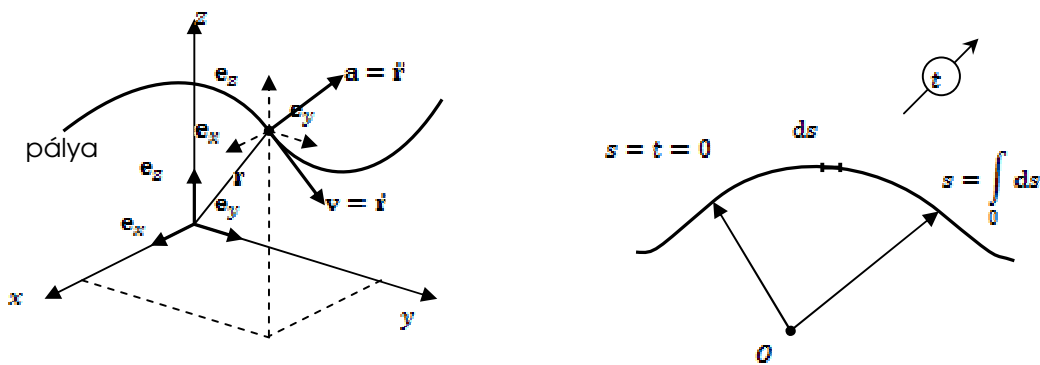
A tömegpont $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ sebessége pedig:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r}, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

hiszen $d\phi/dt \equiv \dot{\phi} \equiv \omega$. Ezzel a feladatunkat teljesítettük.

Egy adott koordináta-rendszerben, az $\mathbf{r}(t)$ általános térbeli mozgás ismeretében, a sebességvektor és a gyorsulásvektor formálisan kiszámítható. Az eredmény legtöbbször egyáltalán nem szemléletes, mert a három vektor egymáshoz való (geometriai) viszonya a kapott formákból nehezen olvasható ki. Ezért a kinematikában azt a megoldást választjuk, hogy a sebesség- és a gyorsulásvektorokat a tömegpont pályájához viszonyítva határozzuk meg. Ez egyfajta geometriai szemléletet jelent, hiszen a tömegpont adott helyén a sebesség és a gyorsulás mint lokálisan megadott vektorok jelennek meg.

A fenti egyszerű körmozgásos feladatnál kimondatlanul is ezt csináltuk. Erre a mozgás speciális volta adta meg a lehetőséget, nevezetesen az, hogy a henger koordináta-rendszer könnyen „illeszkedik” a körmozgás pályájához. Általános térbeli mozgásoknál természetesen ez egyáltalán nincsen így. Szükséges tehát egy általános elvi módszer kidolgozása.



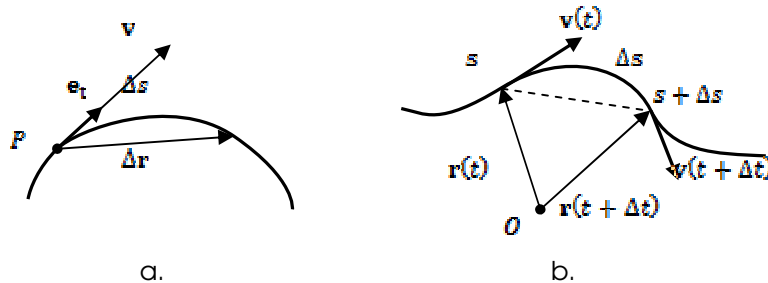
1.1.3. ábra

Mivel a pályát magát az $\mathbf{r}(s)$ függvény adja meg, ezért célszerű lesz, ha az időderiváltakat az $\mathbf{r}(s(t))$ összetett függvényből számítjuk ki. Használva a közvetett deriválás műveletét, a sebességvektor a következő módon adódik:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(s(t)) = \frac{d}{dt} s(t) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s) = \dot{s} \cdot \mathbf{r}'(s).$$

Itt és a továbbiakban a vesszővel az s úthossz szerinti deriválást jelöljük. \mathbf{r}' -nek igen szemléletes geometriai jelentése van. Ugyanis:

$$\mathbf{r}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{e}_t.$$



1.1.4. ábra

Hiszen, mint az az 1.1.4.a. ábrából kitűnik a $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \Delta s$. Azaz \mathbf{r}' a pálya érintő egységvektora, amit \mathbf{e}_t -vel jelölünk és **tangenciális egységvektornak** nevezünk. Tehát a sebességvektor mindig érintő irányú vektor és a nagysága \dot{s} -al egyenlő. Ezért aztán írható, hogy:

$$\mathbf{v} = \dot{s} \cdot \mathbf{e}_t = v \cdot \mathbf{e}_t.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe (a pont pályája) s szerinti deriválása magáról a pálya geometriájáról szolgáltat adatokat, hiszen közvetlenül („expliciten”) a t időparamétert nem tartalmazza. A gyorsulásvektor (1.1.4.b. ábra) hasonló módszerrel számolható:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot v.$$

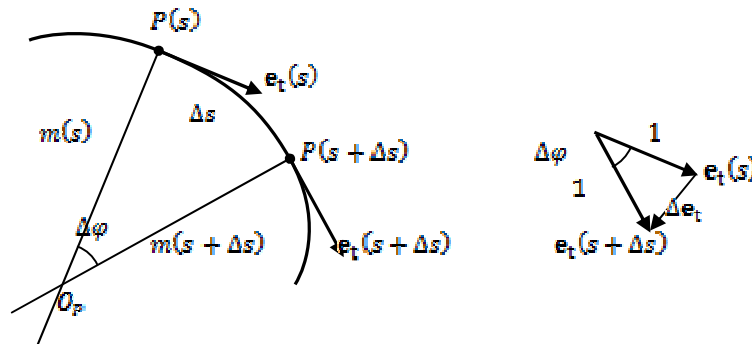
Ugyanakkor

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d}{ds} (v \cdot \mathbf{e}_t) = \mathbf{e}_t \frac{dv}{ds} + v \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \mathbf{e}_t \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} + v \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \mathbf{e}_t \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} + v \frac{d\mathbf{e}_t}{ds}.$$

Ezt beírva \mathbf{a} kifejezésébe, a gyorsulásra azt kapjuk, hogy:

$$\mathbf{a} = \dot{v} \cdot \mathbf{e}_t + v^2 \mathbf{e}_t'.$$

Hátra van még az érintő egységvektor \mathbf{e}_t' úthossz szerinti deriváltjának a meghatározása. Ez szintén egy geometriai adat lesz, hiszen a pálya adatai (a mozgástól függetlenül) egyértelműen meghatározzák.

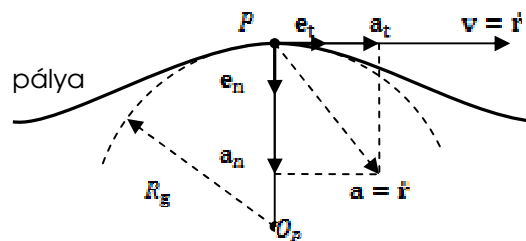


1.1.5. ábra

Az eljárás az 1.1.5. ábrán egyértelműen követhető. A térgörbe két igen közeli $P(s)$ és $P(s + \Delta s)$ pontjában definiált $\mathbf{e}_t(s)$ és $\mathbf{e}_t(s + \Delta s)$ érintő vektorok egy síkot határoznak meg. Ebben a síkban fekszik a két pont közötti pálya is. Ha az egységvektorokra (a szóban forgó síkban) $m(s)$ és $m(s + \Delta s)$ merőleges egyeneseket rajzolunk akkor ezek egymást egy O pontban metszik. Elegendően kicsiny Δs esetén nyilvánvaló, hogy

$$\overline{OP(s)} \approx \overline{OP(s + \Delta s)} \equiv R_g.$$

Az R_g neve **görbületi sugár** és a reciprokát **görbületnek** hívjuk. Természetesen egy általános térgörbénél az O nem egy fix pont és $R_g(s)$ is változik a görbe mentén. Ha speciálisan olyan pályát tekintünk, ahol az O pont nyugalomban van és az $R_g(s) = R_0$ állandó, akkor ez nyilvánvalóan egy körmozgás pályája lesz. Ez viszont azt is jelenti, hogy egy tetszőleges mozgás mindig felfogható úgy, mint pillanatnyi körmozgások egymásutánja.



1.1.6. ábra

Nyilvánvaló, hogy kapcsolat kell, hogy legyen az R_g és az $\mathbf{e}_t(s)$ megváltozása között. Az 1.1.5. ábra alapján látható, hogy a

$$\Delta \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t(s + \Delta s) - \mathbf{e}_t(s)$$

egységvektor-változás merőleges $\mathbf{e}_t(s)$ -re. Ezt a merőleges irányt az \mathbf{e}_n *normális egységvektorral* jelöljük. Felhasználva az ívhosszal való szögmérés elvét tudjuk, hogy $d\mathbf{s} = R_g \cdot d\varphi$. Ezért tehát:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_t}{\Delta s} = \mathbf{e}_n \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \mathbf{e}_n \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{e}_n \cdot \frac{d\varphi}{R_g d\varphi} = \frac{1}{R_g} \mathbf{e}_n.$$

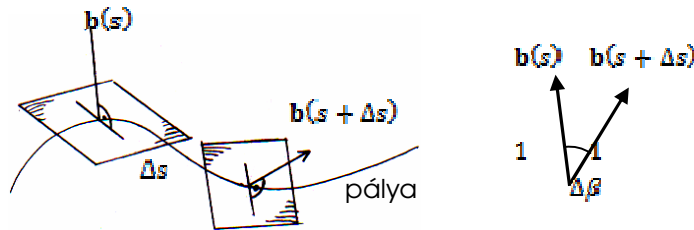
Írható tehát, hogy:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_t = \frac{1}{R_g} \mathbf{e}_n.$$

Beírva ezt a gyorsulás formulájába, adódik, hogy:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \cdot \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R_g} \mathbf{e}_n,$$

ahol természetesen írható, hogy $\dot{v} = \dot{s}$. Ebből szépen leolvasható, hogy a gyorsulásvektornak van egy sebességgel párhuzamos és egy arra merőleges komponense. Az egyik a sebesség nagyságának, a másik a sebesség irányának a megváltozását jellemzi. Látható, hogy $R_g(s) = R_0$ állandó esetén az általános körmozgás (jól ismert) kinematikai egyenleteihez jutottunk. Összehasonlítva a (XXX) egyenlettel látható, hogy $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_\varphi$ és \mathbf{e}_n a kör centruma felé mutat, tehát a polárkoordinátás \mathbf{e}_r -nek a -1 -szerese.



1.1.7. ábra

Általános térbeli mozgásnál a tangenciális és a normális egységvektorok a pillanatnyi körmozgás síkját adják meg. Ennek a síknak a térbeli helyzetét a *binormális egységvektorral* jellemezhetjük:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n.$$

Síkmozgás (síkbeli pálya) esetén \mathbf{b} állandó, térbeli pálya esetén pedig $\mathbf{b}(s)$ állandóan változtatja az irányát. A pálya „térbeliségének” a jellemzésére szolgál a \mathbf{T} torzió, amelynek definíciója a következő:

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{ds},$$

ahol $\Delta \beta$ jelenti a $\mathbf{b}(s)$ és a $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ egységvektorok közötti szöget.

Igazak a következő (egyáltalán nem nyilvánvaló) összefüggések (a bizonyítást az Olvasóra bízunk):

$$\frac{1}{R_g} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{T} = \frac{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'|^2}.$$

Látható tehát, hogy két fontos geometriai adat (a pálya R_g görbületi sugara és a pálya \mathbf{T} torziója) egyaránt kiszámítható a pályára jellemző s paraméter vagy a mozgásra jellemző t idő paraméter szerinti deriválásokkal.

1.2. Egyetlen tömegpont általános dinamikája

1.2.1. Történeti bevezető

A *dinamika* a *mechanikának* az a része, amelyik a mozgás okaival foglalkozik. A „miért”-re ad választ, ellentétben a *kinematikával*, amelyik csak a „hogyan”-nal foglalkozik. ISAAC NEWTON (1643-1727) fogalmazta

meg először azokat az alaptörvényeket, amelyek segítségével meg tudjuk magyarázni, hogy a testek miért éppen úgy mozognak, ahogyan azt egy adott esetben teszik.

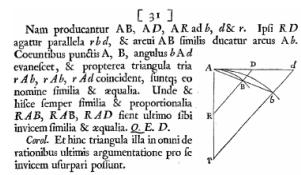
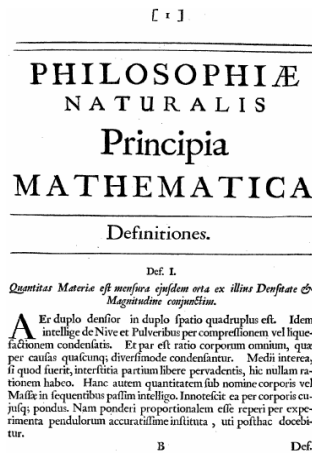
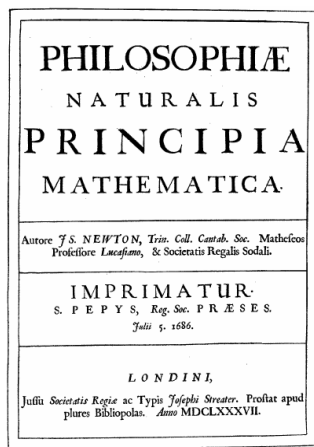
„Égi” és „földi” megfigyelések és a megfigyelt mechanikai mozgások számszerű leírásának sokasága jelentette az utat a newtoni törvények felismeréséhez.

NEWTON maga mondta:

„Ha távolabbra láttam másoknál, azt azért tehettem, mert óriások vállán álltam.”

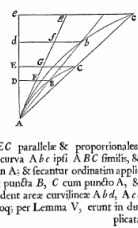
TYCHO BRAHE, GALILEI GALILEI, JOHANNES KEPLER, RENÉ DESCARTES, CHRISTIAAN HUYGENS voltak ezek az „óriások”. Ezen megismerési út végét NEWTON műve,

a **PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA** jelentette (1687).



Lemma IX.

Si recta AE & Curva AC positae datae se mutuo secant in angulo



Néhány oldal a Principia első kiadásából (1686)

Megszületett a mai értelemben vett **fizika** tudománya. Már a mű címe is lényeges, hiszen a természetfilozófia **matematikai elveiről** beszél. Ez mintegy válsz GALILEI alapvető felismerésére, amely a mai **modern természettudomány** (és az ezen alapuló technikai civilizációnk) egyik alapköve. Eszerint ugyanis: „A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és az a nyelv: a matematika.” Ez a fontos tény NEWTON munkásságában konkrét alakot öltött, hiszen NEWTON felismerte azt a matematikai nyelvet is (ez a differenciál- és az integrál-számítás), amellyel a Természet (a mechanikai jelenségeknél) szól hozzánk. Természetesen az azóta eltelt több mint 300 év alatt sokan és sokat foglalkoztak mechanikával. A NEWTON által megfogalmazott törvények (a lényegük megtartása mellett) letisztultak és absztrakt matematikai modellé fejlődtek. Ma már ebben a formában fogalmazzuk meg őket.

NEWTON törvényeit (axiómáit) **tömegpontokra** mondjuk ki. Ez az a modell, amelyen a matematikai számítások egyértelműen elvégezhetőek. A valódi, kiterjedt testeket tömegpontok sokaságaként modellezzük majd. Az itt felismert törvények már precízen alkalmazhatóak a minket körülvevő véges méretű (tetszőleges halmazállapotú) tárgyak mechanikai viselkedésének a tanulmányozására. A következőkben ezt az utat követjük.

Az általunk felismert természettörvények ún. **kerettörvények**, azaz pontosan meg tudjuk (meg kell tudnunk) mondani azon jelenségeknek a körét, amelyeknek a megmagyarázására szolgálnak. Ilyen a newtoni mechanika is. A Newton törvények fénysebességnél sokkal kisebb sebességgel mozgó, makroszkopikus méretű testek mechanikai viselkedését modellezzik. Ezt nevezzük **klasszikus mechanikának**.

A klasszikus mechanika általánosítása nagy sebességek esetén a **speciális relativitáselmélethez**, mikroszkopikus (atomi méretek) tartományában pedig a **kvantummechanikához** vezet. A **modern fizikának** ezek a fejezetei természetesen nem hatálytalanítják a Newton törvényeket. A newtoni modell (éppen azért, mert „csak” modell)

továbbra is igen pontosan megadja a klasszikus testek mindennapi dinamikáját. Sőt, mind a speciális relativitáselmélet, mind pedig a kvantummechanika **határesetben** vissza kell, hogy adja a newtoni mozgástörvényt. Ezt nevezzük **korrespondencia-elvnek**. Az elméleti fizika egyik igen fontos feladata ezen modellek közötti viszonyrendszer bemutatása.

1.2.2. A tömegpont mozgásegyenlete

A newtoni mechanikával a *Kísérleti Fizika* tantárgy keretében már részletesen foglalkoztunk. Az ott szerzett ismereteket adottnak tekinthetjük. Tehát pontosan tudjuk a **tömeg** és az **erő** fogalmak fizikai jelentését. Itt és most „csak” átismételjük az ott megtanultakat. Esetleg más nézőpontból tekintünk az ott kapott eredményekre.

Tekintsünk egy m tömegű pontszerű testet. Ezt nevezzük **tömegpontnak**. Ez a tömegpont az őt körülvevő testek hatására valamilyen $\mathbf{r}(t)$ függvény szerint mozog. Az $\mathbf{r}(t)$ függvényt egy olyan vonatkoztatási rendszerben adjuk meg, amelyben a Newton törvények igazak. Ezt nevezzük **inerciarendszernek**. (lásd: **Newton 1. törvénye**). Ennek a matematikai modellje egy koordináta rendszer lesz.

A testek hatását a tömegpontra ható erőkkel adjuk meg, amelyek matematikai modellje az **erővektor** (**Newton 4. törvénye**). Ha a tömegpont N darab testtel van kölcsönhatásban, akkor a reá ható eredő erő:

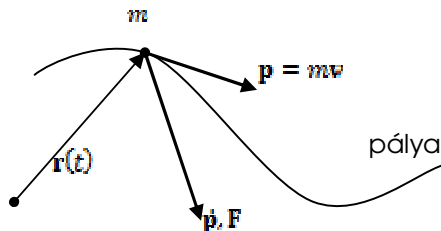
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i.$$

A tömegpont mozgásegyenletét **Newton 2. törvénye** adja meg, amely szerint:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F},$$

ahol bevezettük a tömegpont **impulzusának** a fogalmát, azaz

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}.$$



1.2.1. ábra

Az erők forrása a tömegpont és a testek közötti kölcsönhatás. A hétköznapi életben a minket körülvevő makroszkopikus testek között csak akkor lép fel erőhatás, ha azok közvetlenül érintkeznek egymással. Ezért a tömegpontnak is érintkeznie kell a reá ható testekkel. Ugyanakkor „érezhetően” jelen van a hétköznapijainkban egy olyan erőhatás is, ahol nem kell, hogy a tömegpont közvetlenül érintkezzen a testtel. Ez a **gravitáció**. Nem véletlen, hogy a **PRINCIPIÁ**ban NEWTON kidolgozta a **Newton-féle gravitáció** elméletét is. Ez kellett ahhoz, hogy az erőhatást a mozgásegyenlettől függetlenül is tudja definiálni. NEWTON természetesen még nem ismerhette az elektrodinamikát. Nem tudott az elektromos töltéssel bíró részecskék és az elektromágneses tér kölcsönhatásairól. Nem volna szükségszerű, de tapasztalati tény, hogy a Newton törvények az elektromágneses mezőben mozgó tömegpontra is érvényesek.

Mindenfajta erő ún. **lokális erő**. Ez azt jelenti, hogy az erőhatás csak a tömegpont \mathbf{r} helyén lévő fizikai viszonyoktól függ (bármit is értsünk most „fizikai viszonyokon”). Ennek a lokálisnak a következtében az \mathbf{r} helyen lévő tömegpontra ható eredő erő matematikai alakja (elvileg) a következő lehet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots; t).$$

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a makroszkopikus testek között ható „természetes” erők legfeljebb

$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$

alakban írhatók fel. A hétköznapi életben (általában) a súrlódásból és a közegellenállásból származó erők a sebességfüggők. Elvileg lehetne másképpen is, de a tapasztalati tény az, hogy ez így van!

Az elektrodinamikából tudjuk, hogy egy elektromágneses mezőben a q töltéssel bíró tömegpontra ható erő:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Látható, hogy a Lorentz-erő sebességfüggő.

Nyilvánvaló, hogy konstruálhatók „mesterséges” („intelligens”) testek is, amelyek a legáltalánosabb erőhatást produkálhatják. Például erősíthetnénk a tömegpontra egy kis rakétát és egy fedélzeti számítógéppel úgy vezérelnénk a fűvókákat, hogy a tolóerő a sebesség tetszőleges időszerinti deriváltjától függjön. Tehát a szóban forgó „megszorításnak” az eredete a **tapasztalat** és nem elvi megfontolás.

Tapasztalati tény az is, hogy makroszkopikus méretű testek esetén, leggyakrabban (a súrlódásmentes esetekben) az erők csak a tömegpont helyétől függenek és annak mozgásállapotától nem, azaz:

$\mathbf{F}(\mathbf{r}; t)$.

A fenti függvény neve **erőtér**, hiszen a tér minden egyes pontjában a tömegpontra egy jól definiált erő hat. A mozgásegyenlet tehát (ld. Newton 2. törvénye) a következő alakot ölti:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t).$$

Az egyenlet bal oldalán az időderiválás elvégezhető:

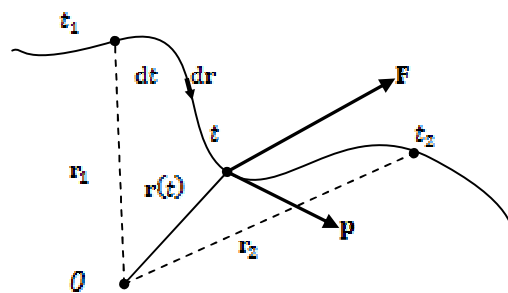
$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{m}\dot{\mathbf{r}}.$$

Abban a speciális esetben (fizikailag ez az általánosabb) ha a pont m tömege állandó, akkor $\dot{m} = 0$. Így jutunk a jól ismert, „népszerű” alakhoz, azaz:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t).$$

1.2.3. A munkatétel

A mozgásegyenletből fontos törvények vezethetők le. Ezek megkönnyíthetik egy adott mechanikai probléma megoldását, hiszen nem kell mindig a „kezdetektől” elindulnunk. A továbbiakban, hacsak azt előre nem közöljük, a tömegpont m tömege mindig állandó lesz.



1.2.2. ábra

Induljunk ki a mozgásegyenletből:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (skalárisan) az $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektorral:

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}.$$

Az egyenlet bal oldala egy teljes derivált alakjába írható:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}}.$$

Integráljuk mind a két oldalt a $[t_1, t_2]$ időtartományra. Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt.$$

Az egyenlet jobb oldalán lévő integrál neve az \mathbf{F} erő által végzett *munka*:

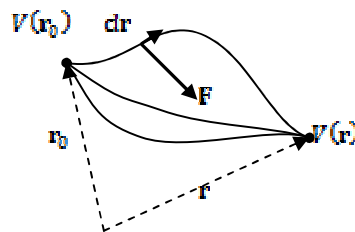
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} \equiv W_{12}.$$

Látható, hogy a W_{12} munka mindig kiszámítható (legfeljebb nehezen) bármilyen módon függjön is az erő a tömegpont mozgásállapotától. Az egyenlet bal oldalán álló $E_{\text{kin}} = (1/2)mv^2$ kifejezést *kinetikus energiának* nevezzük. A kapott egyenlőség a *munkatétel*:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{12}.$$

Szavakban: *egy tömegpont kinetikus energiájának a megváltozása egyenlő a rá ható erők munkájával.*

1.2.4. A potenciális energia és a mechanikai energia megmaradása



1.2.3. ábra

Tegyük fel, hogy a tömegpontra ható erő olyan, hogy (expliciten, azaz közvetlenül) nem függ sem az időtől sem pedig a pont mozgásállapotától, azaz $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektortérrel modellezhető. Továbbá speciálisan olyan, hogy egy zárt görbére vett integrálja zérus, azaz:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy ennek az erőnek a tér két tetszőleges pontja között végzett munkája nem függ magától a pálya alakjától, csakis a két végpont helyzetétől, azaz:

$$\int_{\mathbf{r}_b}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \equiv V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}).$$

Az itt bevezetett $V(\mathbf{r})$ skalár függvény neve *potenciális energia*. Ha a tér egy tetszőleges \mathbf{r}_b pontjában megadjuk (önkényesen) a $V(\mathbf{r}_b)$ értéket, akkor a $V(\mathbf{r})$ potenciális energia függvény a tér minden pontjában kiszámítható lesz, hiszen:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_b) - \int_{\mathbf{r}_b}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Azt mondjuk erre, hogy a $V(\mathbf{r})$ függvény csak egy „additív konstans erejéig” meghatározott. Természetesen megadható az inverz kapcsolat is $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ és $V(\mathbf{r})$ között. Mivel a fizikai tartalom nem függ attól, hogy milyen koordináta-rendszerben dolgozunk, célszerű kezdetben mindig Descartes koordinátákat választanunk (x , y , z). Ekkor nyilvánvalóan írható, hogy:

$$dV = -Fdr = -F_x dx - F_y dy - F_z dz.$$

Ugyanakkor a $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ többváltozós függvény deriválási tulajdonsága miatt tudjuk, hogy

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Ez alapján adódik, hogy

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

A jobb oldalon álló matematikai művelet neve *gradiens* ∇V , és a következő szimbólumokkal jelöljük:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\nabla V = -\sum_{x,y,z} \partial_i V \cdot \mathbf{e}_i.$$

Ebben az esetben a munkatétel így írható: $(1/2)mv_2^2 - (1/2)mv_1^2 = -V(\mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1)$, azaz

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + V(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + V(\mathbf{r}_1).$$

Ez természetesen a tér bármelyik két pontjára igaz. Tehát *létezik egy skalár mennyiség, amely a mozgás során állandó marad*. Ennek a neve a tömegpont *mechanikai energiája*, azaz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_{\text{kin}}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) = \text{állandó}.$$

Ez a *mechanikai energia megmaradásának a tétele*. Mivel az \mathbf{E} (mechanikai) összenergia a mozgás során nem változik (megmarad, azaz „konzerválódik”) az ilyen $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőtereket *konzervatív erőtérek* nevezzük.

Mivel a kinetikus energia soha nem lehet negatív, *a tömegpont mozgása során csak olyan térrészben tartózkodhat, ahol $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \geq V(\mathbf{r})$* . Ezt a tartományt nevezzük (a mozgás számára) *klasszikusan megengedett tartománynak*.

Mechanikai vizsgálódásaink során az a célunk, hogy a lehető legegyszerűbb matematikai alakra hozzuk a mozgásegyenleteinket. Így aztán gyakran előfordul, hogy az adott (szükségképpen) 3-dimenziós problémát sikerül egy ekvivalens egydimenziós feladattá transzformálni. Ezért célszerű foglalkoznunk az egydimenziós konzervatív mechanikai problémák általános tulajdonságaival.

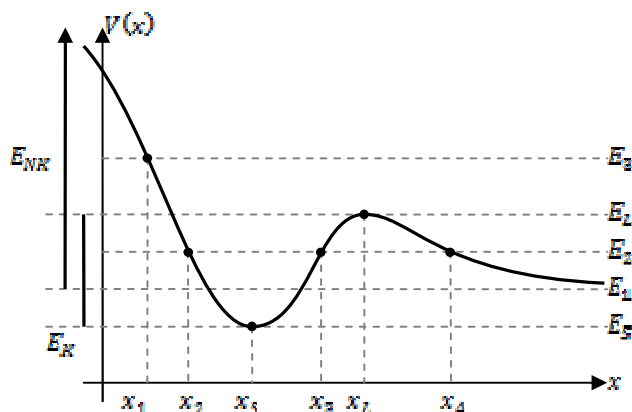
Legyen az egydimenziós koordinátánk x . Konzervatív rendszer esetén írható, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E.$$

A tömegpontra ható erő:

$$F(x) = -\partial_x V.$$

Egy tömegpont *kötött állapotban* van, ha véges térrészben tartózkodhat (a klasszikusan megengedett tartomány véges), ellenkező esetben *nem kötött állapotról* beszélünk. Az **Error! Reference source not found.** ábrán felrajzoltunk egy jellegzetes $V(x)$ függvényt, amelyen a tömegpont lehetséges dinamikai állapotai megmutathatók.



Ha a tömegpont E összenergiája E_5 , akkor csak az x_3 pontban lehet, és itt *stabil egyensúlyban* van. Ha $E = E_2$, akkor a klasszikusan megengedett tartomány $[x_2, x_3]$ és $[x_4, \infty)$. Tegyük fel, hogy a tömegpont x_2 és x_3 között van. Az $(1/2)mv^2 + V(x) = E$ egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$v = \pm \sqrt{(2/m)(E - V(x))},$$

vagyis a potenciál alakjából, a tömegpont sebessége megkapható. Az x_3 pontban $E = V$, ezért $v = 0$ és a tömegpontra egy negatív irányba mutató erő hat (ld. a görbe irántangensét x_3 -ban). Így a pont negatív irányba fog gyorsulni. Hasonló gondolat érvényes x_2 -re is. A tömegpont tehát az $[x_2, x_3]$ tartományban mozog, azaz kötött állapotban van. Az x_2 -t és x_3 -at *fordulópontoknak* nevezzük. Azonban az E_2 energiájú tömegpont lehet nem kötött állapotban is akkor, ha az $[x_4, \infty)$ tartományban tartózkodik.

Az $E = E_2$ és $x = x_2$, esetben a tömegpont *egyensúlyban* van, de ez nem egy *stabil* egyensúlyi helyzet. (*instabil* vagy *labilis*) Az ábrán E_K , illetve E_{NK} jelzi a kötött, illetve a nem kötött állapotokhoz tartozó energia tartományokat. Például, ha a tömegpont kötött állapotban van, akkor biztosan $E_5 \leq E \leq E_2$.

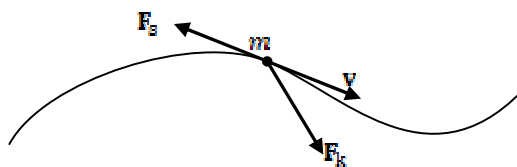
Fontos megjegyzés. Mint az ismeretes, egy m tömegpont gravitációs potenciális energiája

$$V_G = -\Gamma \frac{Mm}{r}.$$

Ez felírható $V_G = \Phi_G m$ alakban is, ahol Φ_G neve *gravitációs potenciál*. A „potenciál” és a „potenciális energia” két különböző fogalom, a mindennapi „szakzsargonban” azonban a fizikusok mindig „potenciálról” beszélnek. A szöveggörnyezetből úgyis kiderül, hogy miről van szó. Csak akkor használjuk a „potenciális energia” megnevezést, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy most valóban „energiáról” van szó. A jegyzet elkövetkező részében gyakran mi is „potenciált” mondunk, jóllehet valójában „potenciális energiára” gondolunk.

1.2.5. Disszipatív erők. A munkatétel általánosítása

Nem konzervatív mozgás legegyszerűbb példája az egyszerű „csúszó” súrlódás. Ha egy tömegpont egy vízszintes lapon mozoghat, akkor a síklap és a tömegpont között egy állandó nagyságú $F_s = \mu mg$ súrlódó erő hat.



1.2.4. ábra

Az eddigi tanulmányainkból ez jól ismert jelenség. Azt is tudjuk, hogy a (csúszó) súrlódási erő függ a tömegpont mozgási állapotától, hiszen mindig a pillanatnyi elmozdulással ellentétes irányban hat, azaz egy sebesség(vektor)tól függő erőről van szó. Ennek matematikai alakja

$$\mathbf{F}_s = -\alpha(\mathbf{v}/v),$$

feltéve, hogy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ismerteseek még másfajta sebességfüggő erőhatások is. A tapasztalat szerint a közegellenállásból származó erőhatás kétféle is lehet. Jó közelítéssel:

$$\mathbf{F}_{ks} = -\alpha \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_{ks} = -\alpha \cdot v \cdot \mathbf{v}.$$

Ez utóbbi a sebesség nagyságának a négyzetes (azaz nem lineáris) függvénye, ami a számolások során nagy gondot jelenthet. A továbbiakban ezzel nem foglalkozunk.

Mivel a kinematikából tudjuk, hogy a sebességvektor mindig a pálya érintőjével párhuzamos, ezért írható, hogy

$$\mathbf{F}_s = -\alpha \cdot \mathbf{e}_t.$$

A súrlódási erő esetén tehát

$$\oint \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} = \oint (-\alpha) \mathbf{e}_t \cdot d\mathbf{r} = -\alpha \oint ds = -\alpha S,$$

ahol S a zárt görbe hossza ($S \geq 0$). Azaz ***a súrlódási erő nem konzervatív erő. Nem definiálható egy hozzá tartozó potenciális energiafüggvény.*** Az ilyen mechanikai rendszereket ***disszipatív rendszereknek*** nevezzük és a ható erőket ***disszipatív erőknek***. A súrlódási erő tehát disszipatív erő. Ha a tömegpontra egy \mathbf{F}_k konzervatív és egy \mathbf{F}_s súrlódási (disszipatív) erő hat, akkor a munkatétel értelmében

$$\left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = [-V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}.$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$[E_{kin} + V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}.$$

Felhasználva a mechanikai energia fogalmát, írható, hogy

$$E(\mathbf{r}) - E(\mathbf{r}_0) = + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}.$$

Szavakban megfogalmazva: ***egy tömegpont mechanikai energiájának a megváltozása a ráható disszipatív erők munkájával egyenlő.*** Súrlódási erőknél ez mindig negatív. Ebben az esetben tehát a mechanikai energia nem egy megmaradó mennyiség.

Látni fogjuk majd, hogy makroszkopikus skálán definiált disszipatív erő(k) munkáját mikroszkopikus skálán lehet tömegpontok dinamikájaként is értelmezni. Azaz a mikroszkopikus skálán csak két energiafajta van: kinetikus- és potenciális energia.

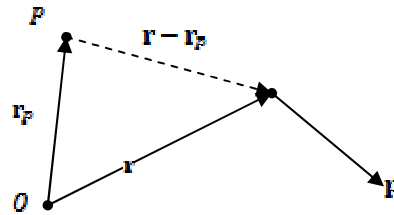
<< A különböző fizikai mezőkben értelmezett energia (pl. elektromágneses energia) >>

<< Ezen energiafajták megfelelő szintű általánosításai. >>

1.2.6. Egyetlen tömegpont perdülete

Az \mathbf{r} helyen lévő, \mathbf{p} impulzusú tömegpontnak egy adott, **álló** \mathbf{P} pontra vett **perdületét (impulzusmomentumát)** a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{L}_P = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{p}.$$



1.2.5. ábra

A következőkben a P pont (hacsak másként nem döntünk) maga az O origó lesz, ahonnan az \mathbf{r} helyvektort is mérjük. Azaz

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Szorozzuk meg a tömegpont $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ mozgásegyenletének mindkét oldalát \mathbf{r} -el (balról és vektoriálisan). Kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Kihasználva azt a tényt, hogy a sebesség- és az impulzusvektor párhuzamos egymással (azaz $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$), írható, hogy

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Ha bevezethetjük az \mathbf{F} erő(nek az origóra vett) $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ *forgatónyomatéka* fogalmát, az előző egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}.$$

Ennek az egyenletnek a neve *perdiülettétel*.

1.2.7. Megmaradási tételek egyetlen tömegpont mozgása során

Az ún. *megmaradási tételek* igen fontos és hasznos szerepet játszanak, nemcsak a mechanikában, hanem a fizika más fejezeteiben is. Ezen tételek első, legegyszerűbb megnyilvánulásait már egyetlen tömegpont dinamikája esetén is láthatjuk. Legyen a tömegpontra ható összes erők eredője

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i.$$

Ha a tömegpontra ható erők eredője zérus, azaz $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, akkor a Newton 2. törvénye alapján az *impulzusmegmaradás tételéhez* jutunk:

$$\mathbf{p} = \text{állandó}.$$

Ha a tömegpontra ható erők eredőjének a nyomatéka zérus, azaz $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, akkor az *impulzusmomentum-megmaradás tételét* kapjuk:

$$\mathbf{L} = \text{állandó}.$$

Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, akkor a *mechanikai energia megmaradás* törvénye adódik:

$$E = \text{állandó}.$$

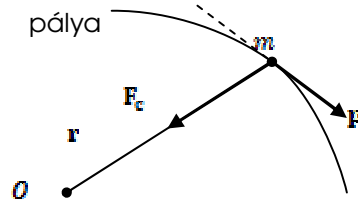
Ezeket a (mozgás során állandó) dinamikai mennyiségeket *mozgásállandóknak* nevezzük.

Összetett mechanikai rendszerek (tömegpontrendszerek) esetén ugyancsak megfogalmazhatók a fenti tételekkel analóg mozgásállandók. Sőt, megmutatható, hogy ezen megmaradási tételek valamilyen alapvető (tér és idő) szimmetria következményei. Ezekről a Mechanika elvei (!!!) c. fejezetben ejtünk majd egy-két fontos szót.

1.2.8. Tömegpont speciális térbeli mozgása: a centrális erőter

Tekintsünk egy olyan erőteret, amelyben a tömegpontra ható erő a tér minden pontjában egy megadott rögzített pont (legyen ez az origó) irányába mutat. Az ilyen erőter legáltalánosabb matematikai alakja

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}; t) = F(r; t) \cdot \mathbf{e}_r.$$

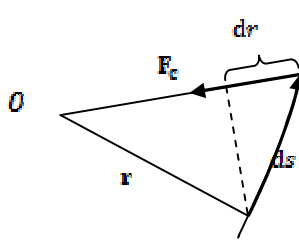


1.2.6. ábra

A klasszikus mechanikai körülmények között előforduló „természetes” erőhatások között azonban ilyen nem tapasztalunk. Azonban az $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = F_c(r) \cdot \mathbf{e}_r$ függvénnyel megadható izotróp (irányfüggetlen) erőterrel már gyakran találkozhatunk. Ilyen például a (Newton-féle) gravitációs erőter de egy rugó végére erősített test is ilyen erőteret érzékel a mozgása során. Az ilyen (immáron leszűkített tulajdonságú) erőtereket centrális erőternek nevezzük. Az izotrópia miatt könnyen belátható, hogy ez az erőter konzervatív is, azaz:

$$\oint \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = \oint F_c(r) \cdot \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{s} = \oint F_c(r) dr = \int_{A_1}^B F_c(r) dr + \int_B^{A_1} F_c(r) dr = \int_{A_1}^B F_c(r) dr - \int_{A_1}^B F_c(r) dr = 0.$$

(JAVÍTÁS: $A_1=A$)



1.2.7. ábra

A levezetés során a zárt görbe menti infinitezimális elmozdulás-vektorokat (a jobb áttekinthetőség végett) most $d\mathbf{s}$ -el jelöltük. Kihasználtuk azt, hogy mivel \mathbf{e}_r a sugárirányú egységvektor, ezért az $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{s}$ skalárszorzat „dr”-t, azaz a centrumtól való (infinitezimális) távolság mértékét adja. Az erőter konzervatív, azaz létezik egy $V_c(r)$ potenciális energia (függvény). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{F}_c(r) = -\frac{dV_c}{dr}.$$

A $V_c(r)$ ekvipotenciális felületei gömbök.

A következőkben megvizsgáljuk egy tömegpont centrális erőterben való mozgásának általános törvényszerűségeit. Mivel az erőter konzervatív, ezért érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, azaz:

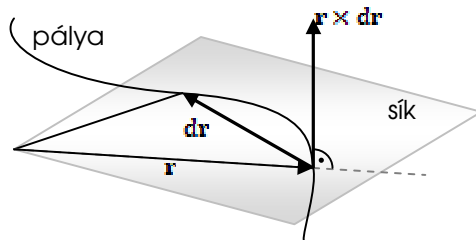
$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_c(r) = E.$$

Felírva a perdülettételt, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c = F_c(r) \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0},$$

azaz **a tömegpont \mathbf{L} perdülete állandó**. Azaz

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{dt} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \text{állandó vektor}.$$

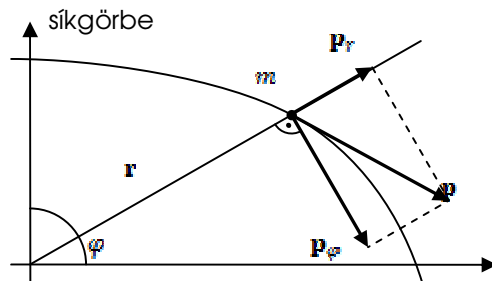


1.2.8. ábra

Az azt jelenti, hogy az $\mathbf{r} \times \mathbf{dr}$ vektor iránya is állandó. Mivel pedig az \mathbf{r} és a \mathbf{dr} vektorok meghatározzák a (pillanatnyi) mozgás síkját, és ez a pálya minden pontjában igaz, ezért a pálya egy síkgörbe lesz. Azaz **centrális erőterben egy tömegpont síkmozgást végez, a pálya egy síkgörbe**. Centrális erőterben mozgó tömegpont esetén tehát van két mozgásállandónk (megmaradó mennyiségünk):

$\mathbf{L} = \text{állandó}, \quad E = \text{állandó}.$

Mivel síkmozgásról van szó, célszerű síkbeli polár koordináta rendszerben dolgoznunk.



1.2.9. ábra

A tömegpont \mathbf{p} impulzusvektora mindig felbontható egy \mathbf{p}_r sugárirányú, és egy rá merőleges \mathbf{p}_φ komponensre, azaz

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\varphi.$$

Mivel $\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{p}_\varphi = 0$,

$$p^2 = p_r^2 + p_\varphi^2.$$

Így a tömegpont összenergiája az alábbi alakba írható:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_c(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} + V_c(r).$$

A perdületvektor így írható:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_r + \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\varphi.$$

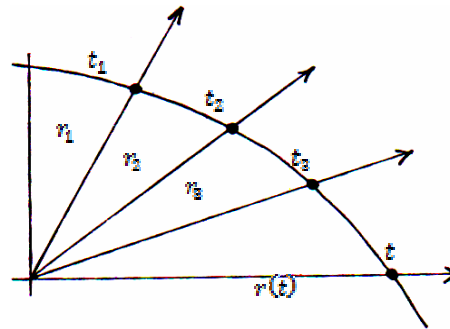
Azaz a perdület (állandó) nagyságára adódik, hogy $L = r p_\varphi$. Ezt beírva az energia kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V_c(r).$$

A kinetikus energia második tagja (az L perdület állandósága miatt) csak az r függvénye. Ezért egy potenciális energiaként is felfogható, azaz definiálható egy ún. **effektív potenciális energia**:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V_c(r) = V_{\text{ef}}(r) + V_c(r).$$

Az újonnan bevezetett, első tag neve *centrifugális potenciális energia*. Az elnevezés jogos, hiszen most hallgatólagosan egy „új” koordináta-rendszerre tértünk át. Ebben a tömegpont helyzetét egyetlen adat, a centrumból induló egyenesen (ez az új koordináta-rendszer egyik tengelye) mért r távolság adja meg.



1.2.10. ábra

Ez a koordinátatengely (mint egy radar antenna sugara a repülőgépet) követi a pont mozgását, azaz a koordináta-rendszerünk most forgó mozgást végez (1.2.10. ábra). Az itt fellépő centrifugális erőhöz rendelt V_{cf} potenciális energiafüggvényt vezettük most be. Ennek bizonyítása elemi módon elvégezhető:

$$F_{cf} = mr\omega^2 = \frac{(mr^2\dot{\omega})^2}{mr^3} = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right) \equiv -\frac{d}{dr} V_{cf}(r),$$

ahol ω -val az r tengely (és így a forgó koordináta-rendszerünk) pillanatnyi szögsebességét jelöltük.

Természetesen, a pont mozgásának a meghatározásához meg kellene oldanunk az $m\ddot{r} = F_c$ mozgásegyenletet. A megoldás egyes technikai részleteire még visszatérünk a fejezet végén. Ugyanakkor már most, pusztán a mozgásállandók ismeretében meg tudjuk mondani a mozgás néhány fontos dinamikai sajátosságát.

Természetesen matematikailag végtelen sokféle $V_c^\pm(r)$ centrális potenciálfüggvény írható fel. A tapasztalatok szerint azonban a természetben előforduló kölcsönhatások olyanok, hogy ezeket „hatványfüggvényekkel” igen jól le tudjuk írni. Azaz pl:

$$V_c(r) = \frac{A}{r^n} - \frac{B}{r^m}$$

Egy ilyen potenciálfüggvény tartalmazhat még valamilyen $\exp\{-\alpha \cdot r\}$ típusú szorzótényezőt ún.

„exponenciális árnyékolást” is. Ezek az matematikai formák mind makroszkopikus, mind pedig mikroszkopikus skálán sikeresen alkalmazható modelleket adnak.

A makroszkopikus világban kétféle kölcsönhatással találkozhatunk. Az egyik a Newton-féle gravitációs potenciál (a fenti általános sémában $n=\infty$ és $m=1$)

$$V_c^N = -\Gamma \frac{M}{r}$$

a másik a rugalmas kölcsönhatás ($n=-2$ és $m=\infty$), azaz

$$V_c^R = +\frac{D}{2} r^2$$

Ezek a makroszkopikus méretű testek között fellépő, jól ismert erőhatásokat adják meg.

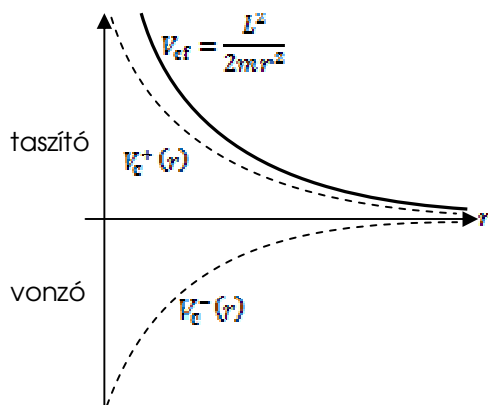
MEGJEGYZÉS: Mikroszkopikus skálán a szilárd testekben illetve a molekulákban fellépő kölcsönhatások (amelyek bonyolult kvantummechanikai effektusok eredőjeként adódnak) már nem írhatók le egyetlen hatványfüggvénnyel. Ekkor használjuk a fenti általánosabb alakot. Pl. a kétatomos molekulák atomjai között az ún. Lennard-Jones potenciál használható, ahol $n=12$, $m=6$. A szilárd

testekben az ún. „árnyékolt Coulomb” kölcsönhatás igen jól használható, ekkor $V_c = -\frac{B}{r} \exp\{-\alpha \cdot r\}$. Ezekkel a megfelelő szaktárgyakban majd még találkozunk.

A következőkben (az egyszerűség végett) olyan monoton csökkenő, vagy növekvő potenciálfüggvényt vizsgálunk, amely egyetlen hatványfüggvénnyel megadható, nevezetesen:

$$V_c = \pm \frac{A}{r^n}$$

Ennek hatása ugyanis az $(\frac{1}{r^2}$ -es) centrifugális potenciálfüggvénnyel könnyen összevethető.



1.2.11. ábra

Az 1.2.11. ábrán a centrifugális- és a centrális potenciális energiafüggvények láthatók. Említettük, hogy kétféle centrális erőterrel foglalkozunk a V_c^- vonzóval és a V_c^+ taszítóval. Ennek megfelelően más lesz a $V_{\text{eff}}(r)$ lefutása is.

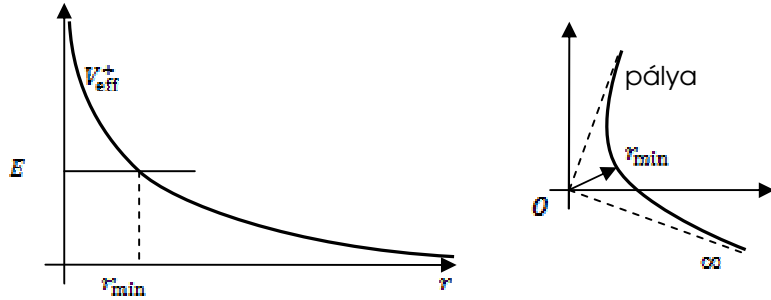
A $V_c^\pm(r)$ centrális potenciál(ok)nak jellegzetes viselkedése van (pl. gravitációs potenciál), nevezetesen:

- $V_c^\pm(r)$ monoton (csökkenő vagy növekvő) függvény,
- $\lim_{r \rightarrow \infty} V_c^\pm = \pm 0$, valamint $\lim_{r \rightarrow 0} V_c^\pm = \pm \infty$.

Taszító (centrális) erőterben az effektív potenciál

$$V_{\text{eff}}^+(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V_c^+(r) \geq 0.$$

A mozgás klasszikusan megengedett tartománya: $r_{\text{min}} \leq r < \infty$, mivel $E \geq V_{\text{eff}}^+$ csak itt teljesül.



1.2.12. ábra

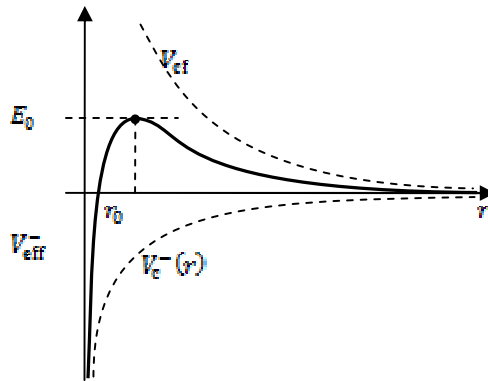
Azaz a tömegpont a ∞ -ból jön, r_{\min} távolságra megközelíti a centrumot, majd ismét a ∞ -be távozik. Tehát nem egy kötött állapotú mozgást végez.

Vonzó erőter esetén már több lehetőség is van.

$$V_{\text{eff}}^-(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V_c^-(r).$$

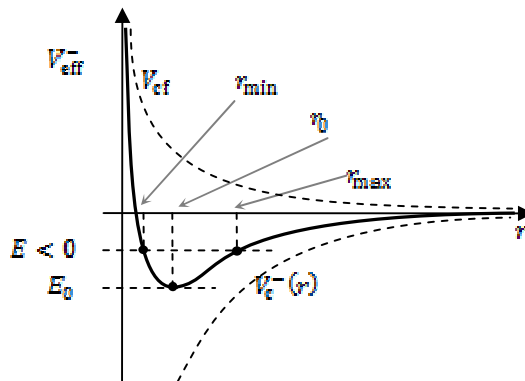
Attól függően, hogy $V_c^-(r)$ milyen hatványfüggvénnyel közelíthető, a következő lehetőségek vannak.

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}^-(r) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}^-(r) = +0.$$



1.2.13. ábra

Ekkor a $V_{\text{eff}}^-(r)$ -nek valamilyen r_0 helyen maximuma kell, hogy legyen. Az $E_0 = V_{\text{eff}}^-(r_0) > 0$ energiájú tömegpont egy r_0 sugarú körpályán mozog. Ez egy labilis egyensúlyi állapot (1.2.13. ábra).



1.2.14. ábra

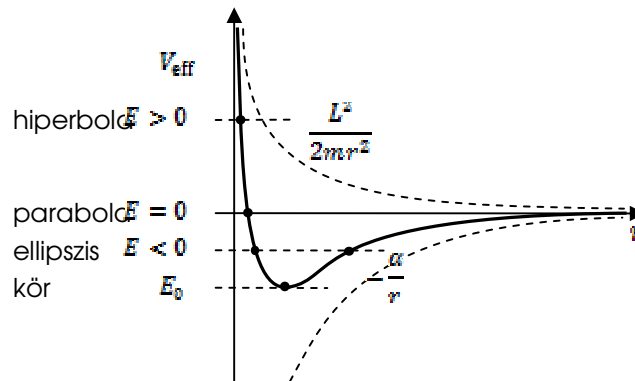
A másik esetet az 1.2.14. ábrán vázoltuk fel. Ekkor

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}^-(r) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}^-(r) = -0.$$

így most a $V_{\text{eff}}(r)$ -nek valamilyen r_0 helyen minimuma kell, hogy legyen. Az $E_0 = V_{\text{eff}}(r_0) < 0$ energiájú tömegpont egy r_0 sugarú körpályán mozog. Ez egy stabilis egyensúlyi állapot. Ha a tömegpont energiája $-|E_0| \leq E \leq 0$ (negatív), akkor olyan mozgás jön létre, amelyik a pályasík $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ körgyűrű tartományába esik. A következőkben csak ez utóbbi típusú, kötött állapotokkal foglalkozunk.

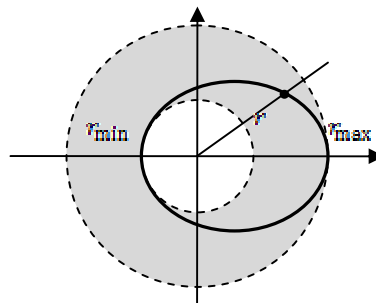
Már volt róla szó, hogy egy mozgásállapotot akkor nevezünk **kötöttnek**, ha a mozgása során mindvégig a tér egy véges tartományában marad. Ezért például a fenti említett körpályák kötött állapotok.

Gyakorlati jelentősége miatt most csak a $V_c = -\alpha/r$ típusú potenciál(is energia) függvénnyel foglalkozunk. Mint az ismeretes, ilyen a gravitációs- és a Coulomb-potenciál. Az energiaviszonyokat az 1.2.15. ábrán szemléltettük.



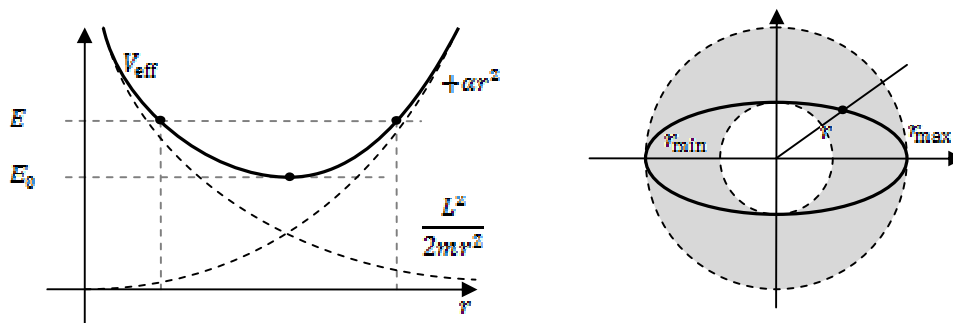
1.2.15. ábra

Ebben az esetben ismerjük a mozgásegyenlet megoldását és a pályákat. Ezek a Kepler-törvények. Innei tudjuk azt, hogy a pályák „kúpszeletek”. Ezek a pályák az E energia szerint könnyen azonosíthatók. Látható, hogy $E > 0$ egy nem kötött állapotot ad egyetlen r_{min} adattal. Ezek hiperbola pályák. Az $E = 0$ esetben a pálya parabola. A kötött állapotok ellipszisek, illetve a kör. Ezek az $E < 0$ energiákhoz tartoznak. Ebben az esetben a tömegpont a centrumtól vett $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ tartományban mozog (1.2.16. ábra)



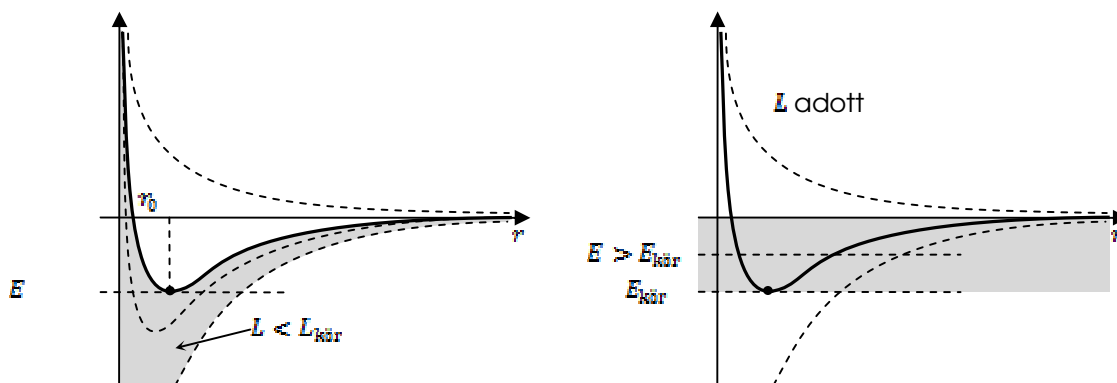
1.2.16. ábra

Érdekességképp megemlítjük, hogy van még egy eset, amikor ellipszis pálya a megoldás. Ez a **térbeli oszcillátor**, amely egy rugó végére erősített test esete („similabda”). Ekkor $V_c(r) = +\alpha \cdot r^2$. Itt csak kötött állapotok vannak. Mindig igaz, hogy $E > 0$. A grafikus megoldás az 1.2.17. ábrán látható.



1.2.17. ábra

Még két fontos (kötött állapotok esetén fennálló) egyenlőtlenségi relációt kell megemlítenünk. Az 1.2.18. ábra alapján kimondhatók az alábbiak.



1.2.18. ábra

Azonos energiájú pályák közül a körpálya perdülete a legnagyobb:

$$E = \text{állandó}, \quad L \leq L_{\text{kör}}$$

Azonos perdületű pályák közül a körpálya energiája a legkisebb:

$$L = \text{állandó}, \quad E \geq E_{\text{kör}}$$

Végezetül essen pár szó arról, hogy miként kell meghatározni a mozgás pályáját. Tudjuk, hogy centrális erőter esetén a tömegpont síkmozgást végez. Célszerű ebben a síkban polárkoordináta-rendszert használnunk. Ekkor a mozgást leíró $\mathbf{r}(t)$ függvény $r(t)$ és $\varphi(t)$ skalárfüggvények ismeretét jelenti. A t időparaméter kiiktatásával („eliminálásával”) végül is az $r(\varphi)$ pályaegyenlethez juthatunk. Ez megoldható anélkül is, hogy az $r(t)$ függvényt ismernénk. Mint látni fogjuk, $r(\varphi)$ meghatározásához elegendő csak a mozgásállandók ismerete. A két megmaradó mennyiségünk az L perdület és az E összenergia.

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{áll}, \quad E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \text{áll}.$$

Átrendezéssel adódik, hogy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{(2/m)(E - V_{\text{eff}})}.$$

Ezek „infinitesimalisokkal” is felírhatók

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt, \quad dr = dt \sqrt{(2/m)(E - V_{\text{eff}})}.$$

Most már a dt kiküszöbölhető (eliminálható) és adódik, hogy

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{mr^2 \sqrt{(2/m)(E - V_{\text{eff}})}} = f(r).$$

Ezek után az $f(r)$ ismeretében a $\varphi(r)$, majd ebből az $r(\varphi)$ meghatározható. Ránézve az egyenletekre könnyen belátható, hogy analitikus megoldások csak speciális $V_c(r)$ -nél adódnak. Erre említettünk két példát az előzőekben.

A valóságban mindig véges nagyságú tömegek lépnek egymással kölcsönhatásba. Newton 3. axiómája értelmében valóban **kölcsönhatásról** van szó. Azaz, pl. két kölcsönható test esetén mind a két test mozgásállapota változni fog. A „rögzített centrum” tehát nem létezik. Ugyanakkor az is igaz, hogy ha az egyik tömegpont tömege sokkal nagyobb mint a másiké, akkor a nagyobbik tömegpont mozgásállapot-változása elhanyagolható a kisebbikéhez képest. Hiszen mindketten ugyanabban a kölcsönhatásban vesznek részt. Például

egy műhold hatása a Földünk mozgására elhanyagolható, míg a műhold mozgását a Föld „irányítja”. Ilyen esetekben a kisebbik tömegpontra nézve a nagyobbik egy álló „erőcentrumnak” tekinthető.

A későbbiekben ki fog derülni, hogy ennél „több” is igaz. Nevezetesen, minden ún. „kéttest probléma” visszavehető egy rögzített centrumú erőterben mozgó egyetlen tömegpont esetére. Ennek bizonyítása nagyon könnyű, de csak a tömegpont-rendszerek tárgyalása során kerítünk rá sort. Egy egyszerű szemléltető példaként mutatjuk majd be.

Megjegyzés: A gyakorlton láttuk, hogy egy „kéttest-probléma” átírható rögzített centrumú egytest feladattá.

1.3. Lineáris rendszerek analízise

1.4. Tömegpont-rendszerek általános dinamikai tételei

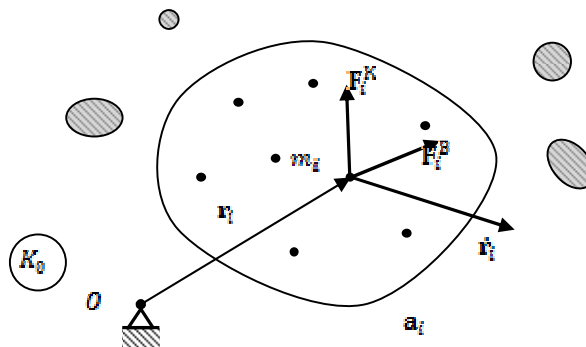
1.4.1. Bevezetés

Eddig egyetlen tömegpont dinamikájával foglalkoztunk. A többi test a tömegpontra ható erők formájában volt jelen a vizsgálatainkban. Most azt fogjuk megnézni, hogy mi történik akkor, ha N darab tömegpont mozgását együttesen vizsgáljuk. A modellünket **tömegpont-rendszernek** nevezzük. A rendszer minden egyes tömegpontjára érvényesek a Newton törvények. Egyszerűség végett tegyük fel, hogy a tömegpontok tömege állandó. A pontrendszerek esetén ez nem jelentős megszorítás.

Azok a makroszkopikus tárgyak ugyanis, amelyeknek a tömege változik a mozgás során (például lyukas liszteszsák, rakéta, stb...) mikroszkopikus skálán olyan tömegpont-rendszerként modellezhetők, amelyben a részecskék száma változik.

A pontrendszer mozgásegyenlete a (rendszert alkotó) tömegpontok mozgásegyenleteinek az együttese lesz, azaz

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$



1.4.1. ábra

Az \mathbf{F}_i erő az i -edik tömegpontra ható összes erők összege. A rendszer tömegpontjaira kétféle erő hat. Egyrészt a rendszert alkotó tömegpontok között ható **belső erők** (\mathbf{F}_i^B) és a rendszerhez nem tartozó testekből adódó **külső erők** (\mathbf{F}_i^K). Ezért írható, hogy

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Az i -edik részecskére ható belső erő részletesen így írható:

$$\mathbf{F}_i^B = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B,$$

ahol \mathbf{F}_{ij}^B az i -edik tömegpontra ható belső erő, amelyet a j -edik tömegpont fejt ki. Természetesen $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$, mert a tömegpont önmagával nincsen kölcsönhatásban. Így a mozgásegyenlet részletesen a következő:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^K + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Természetesen a konkrét megoldáshoz meg kell adni a kezdeti feltételeket, azaz

$$[\mathbf{r}_i(t)]_{t=0} \equiv \mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{0i}, \quad [\dot{\mathbf{r}}_i(t)]_{t=0} \equiv \dot{\mathbf{r}}_i(0) = \mathbf{v}_{0i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Ennek az N darab mozgásegyenletnek a megoldása adja elvileg a mechanikai rendszerünk teljes dinamikáját. A feladat **nagy nehézsége** abban van, hogy az erőhatások a keresett időfüggő helyvektorok **nem lineáris függvényei**, azaz (a lehető legegyszerűbb esetet véve példaként, de megmaradva az általánosság talaján)

$$\mathbf{F}_i^K(\mathbf{r}_i; t), \quad \mathbf{F}_{ij}^B(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Az eddigi (kb 250 év) tapasztalataink azt mutatják, hogy ennek az egyenletrendszernek csak $N = 2$ esetén van „integrálható” megoldása. $N = 3$ -nál már csak közelítő módszerek vannak. A minket körülvevő makroszkopikus testekben $N \approx 10^{23}$. A probléma megoldhatatlan. A Laplace démon bizony törheti a fejét!

Van azonban egy lehetőségünk! Ugyanis léteznek a pontrendszernek olyan általános dinamikai sajátosságai, amelyek nem függenek a tömegpontok közötti kölcsönhatásoktól. Ezek (éppen az általánosságuk miatt) a részletes dinamikát nem tartalmazzák, de a makroszkopikus skálán kielégítő ismereteket nyújtanak számunkra a rendszer fő dinamikai sajátosságairól.

Ezeket néven nevezett törvényekbe foglaljuk úgy mint:

tömegközéppont-tétel,

impulzustétel,

perdülettétel,

munkatétel.

A következőkben ezekkel fogunk megismerkedni.

1.4.2. Tömegközéppont-tétel

Induljunk tehát ki a rendszer mozgásegyenletéből:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^K + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Adjuk össze ezt az N darab egyenletet és a bal oldalon használjuk ki azt, hogy a tömegek állandók és a deriválás és a szummázás művelete felcserélhető:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B. \quad (1.4.1)$$

Newton 3. törvénye értelmében pedig tudjuk, hogy $\mathbf{F}_{ij}^B = -\mathbf{F}_{ji}^B$, ezért a jobboldali kettős szumma értéke nulla. Azaz a belső erők kiejtik egymást. Az adódó mozgásegyenletben csak a külső erők szerepelnek. Legyen a rendszer össztömege $M = \sum_{i=1}^N m_i$, valamint vezessük be az \mathbf{r}_{TKP} **tömegközéppont** (TKP) fogalmát a következő definícióval:

$$\mathbf{r}_{\text{TKP}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Ekkor az (1.4.1) mozgásegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{d^2}{dt^2} M \mathbf{r}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}^K,$$

Illetve

$$M\dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}^K, \quad (1.4.2)$$

Ez az ún. **tömegközéppont-tétel**. Szavakban: **egy pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege ebbe a pontba lenne sűrítve és a külső erők erre a tömegpontra hatnának.**

Látható tehát, hogy a tömegközéppont mozgását ugyanolyan mozgásegyenlet határozza meg, mint egyetlen tömegpontét. Ez a tétel az, amely lehetővé teszi számunkra, hogy valódi kiterjedt testeket néha ne pontrendszerként, hanem csak egyetlen tömegpontként modellezzünk. Például a Föld Napkörüli mozgásának a tanulmányozásakor kapott Kepler törvények természetesen (szigorúan véve csak) a Föld tömegközéppontjára vonatkoznak.

1.4.3. A pontrendszer impulzustétele

A kapott mozgásegyenlet az impulzus fogalmával is megfogalmazható.

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Ha ismét összegezzük i -re, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^B.$$

Tudjuk, hogy a belső erőhatások összege nulla. Vezessük be a rendszer **összimpulzusának** a fogalmát, amelyik a rendszert alkotó tömegpontok impulzusának az összege, azaz

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Ezzel a tömegpontrendszer mozgásegyenlete igen egyszerű alakot ölt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}^K, \quad (1.4.3)$$

Azaz **a rendszer összimpulzusát csak a külső erők változtathatják meg**. Ha a rendszerre külső erők nem hatnak (vagy ezek összege zérus), akkor a rendszer összimpulzusa a mozgás során nem változik:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \text{állandó}.$$

Ez az ún. **impulzusmegmaradás** törvénye (tömegpontrendszerek esetén). A rendszer összimpulzusa kapcsolatba hozható a TKP mozgásával is. Hiszen

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) = M \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}.$$

Látható tehát, hogy ha a tömegek állandók, akkor (1.4.2) és (1.4.3) ekvivalensek egymással.

1.4.4. A pontrendszer munkatétele

Egyetlen tömegpont esetén a munkatétele kimondásakor vezettük be a kinetikus energia fogalmát. Most is hasonló utat fogunk követni. Szorozzuk az

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B$$

egyenletet $\dot{\mathbf{r}}_i$ -vel:

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^K \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i^B \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Az egyetlen tömegpont esetén már használt átalakítás után kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \mathbf{F}_i^K \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i^B \cdot \dot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Összegezve i szerint, valamint felhasználva azt, hogy a deriválás és a szummázás felcserélhetők, adódik

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^B \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.4.4)$$

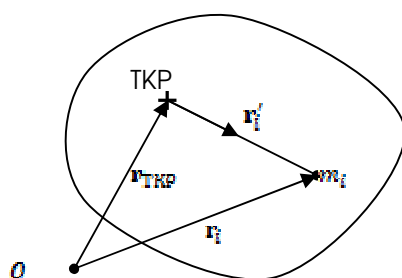
Az egyenlet bal oldalán a zárójelben lévő kifejezést a pontrendszer *kinetikus energiájának* nevezzük:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

Ez igen szemléletes fizikai jelentéssel bíró részekre bontható. Ugyanis a tömegpontok helyvektora a TKP-hoz viszonyítva is megadható a következőképpen:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{TKP}} + \mathbf{r}'_i, \quad (1.4.5)$$

ahol \mathbf{r}'_i az i -edik tömegpontnak a TKP-hoz viszonyított helyzete (1.4.2. ábra).



1.4.2. ábra

Ezzel a pontrendszer kinetikus energiája az alábbi formába írható:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 + \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} \dot{\mathbf{r}}'_i).$$

Elvégezve a lehetséges szummázásokat adódik, hogy

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i.$$

A jobboldali utolsó tag azonban zérus:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}.$$

Ez könnyen belátható, hiszen

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0}. \quad (1.4.6)$$

Ugyanis ez éppen a TKP definíciója egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek origója maga a TKP. Ezt az egyenlőséget a későbbiekben még sokat fogjuk használni. A tömegpont-rendszer (összes) kinetikus energia tehát két tagból áll.

$$E_{\text{kin}} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = E_{\text{kin}}^{\text{TR}} + E_{\text{kin}}^{\text{B}}.$$

Az első tag az ún. *transzlációs kinetikus energia*. Azaz ez olyan, mintha az egész rendszer teljes tömege a TKP-ban lenne koncentrálna és ennek a tömegpontnak a kinetikus energiáját számolnánk ki:

$$E_{\text{kin}}^{\text{TR}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2.$$

A második tag az ún. *belső kinetikus energia*:

$$E_{\text{kin}}^{\text{B}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

Ez adja meg azt a kinetikus energiát, amely a tömegpontoknak a TKP-hoz viszonyított sebességéből származik. Ez lehet rendezetlen mozgás, például a kinetikus gázelméletben szereplő (véletlenszerű) hőmozgás. De lehet egy rendezett mozgás eredménye is például szilárd testek forgómozgása. Visszatérve, az (1.4.4) egyenletre kaptuk tehát, hogy

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{kin}}^{\text{TR}} + E_{\text{kin}}^{\text{B}}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{B}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

(1.4.5) felhasználásával az egyenlet jobb oldala is tovább bontható:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{B}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{\text{B}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Végül is részletesen kiírva az egyenlet mindkét oldalát, a kinetikus energia megváltozására a következő egyenlet adódik:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{\text{B}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.4.7)$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez az egyenlet tovább egyszerűsödik. Ehhez felhasználjuk a tömegközéppont-tételt:

$$M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}^{\text{K}},$$

Ebből (hasonlóan az egyetlen tömegpont esetén alkalmazott eljáráshoz) adódik, hogy:

$$M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}.$$

De tudjuk, hogy az egyenlet bal oldala átírható:

$$M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 \right).$$

Így a translációs kinetikus energia megváltozása kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}, \quad (1.4.8)$$

azaz (1.4.7)-ben a jobb és a bal oldal első tagjai megegyeznek egymással és így ezek kiesnek az egyenletből. Ennek következtében marad tehát, hogy:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}}^{\text{B}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{\text{B}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.4.9)$$

Előtanulmányainkból tudjuk, hogy egy tömegpontra ható erő teljesítménye $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$. Így a TKP rendszerben az i -ik részecskére ható külső erők teljesítménye következő:

$$\mathbf{F}_i^{\text{K}} = \mathbf{F}_i^{\text{K}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i'.$$

Azaz az (1.4.9) jobb oldalán lévő első tag a külső erőknek az összteljesítménye a TKP rendszerben:

$$P^{iK} = \sum_{i=1}^N P_i^{iK} \equiv \frac{d}{dt} W^{iK},$$

ami pedig (összhangban az egyetlen tömegpont dinamikában tanultakkal) a külső erőknek a TKP rendszerben végzett összmunkájával van kapcsolatban.

Térjünk rá az (1.4.9) jobb oldalán szereplő kettős szumma fizikai tartalmának a vizsgálatára.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ji}^B \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ji}^B \dot{\mathbf{r}}_j \right).$$

Az utolsó formulában egy egyszerű $i, j \rightarrow j, i$ indexcserét hajtottunk végre, amely természetesen a szumma értékét nem változtatja meg. Ezután Newton 3. törvénye miatt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (-\mathbf{F}_{ij}^B) \dot{\mathbf{r}}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j).$$

Az utolsó tagban felhasználtuk az (1.4.5) definíciós összefüggést, így \mathbf{r}_{TKP} kiesett. Továbbá írható, hogy

$$\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}'_{ij},$$

ahol a két pont közötti távolságvektort \mathbf{r}'_{ij} -vel jelöltük. Így a szóban forgó kettős szumma kifejezés éppen a belső erők teljesítménye kell, hogy legyen. Ez pedig a belső erők (TKP rendszerben kifejtett) munkájával van szoros kapcsolatban, azaz

$$P^B = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \dot{\mathbf{r}}'_{ij} = \frac{dW^B}{dt}.$$

A belső erők munkáját célszerű a TKP koordináta-rendszerben megadni, annak ellenére, hogy az inerciarendszerben erre ugyanaz adódik, hiszen \mathbf{r}'_{ij} , mivel \mathbf{r}_{TKP} kiesik a kivonáskor. A belső erők a pontrendszer elemei között hatnak, ezért szemléletesebb ezeket az erőket mintegy a „rendszeren belülről” szemlélni.

Végül is (1.4.9) úgy írható, hogy

$$\frac{d}{dt} E_{kin}^B = \frac{dW^K}{dt} + \frac{dW^B}{dt} = P^K + P^B. \quad (1.4.10)$$

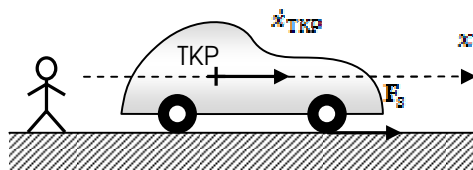
A belső kinetikus energiát a külső és a belső erők munkája változtatja meg.

Összefoglalva a kapott eredményt kimondhatjuk, hogy a pontrendszerek esetén a munkatétel valójában két állítást jelent. Ugyanis mint az az (1.4.8) egyenletből látható, a TKP-ra is felírható egy olyan munkatétel, mint amelyet egyetlen tömegpont dinamikájánál bevezettünk. Azaz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{TKP}^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TKP}, \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 \right) = \frac{dW^K}{dt} + \frac{dW^B}{dt}.$$

JAVÍTÁS: $W^K = W'^K$ és $W^B = W'^B$

Szavakban: *a tömegpont-rendszer translációs kinetikus energiáját a külső erőknek a TKP-on végzett munkája változtatja meg, a belső kinetikus energiát a belső erők munkája és a külső erőknek a TKP rendszerben végzett munkája együttesen változtatja meg.*



1.4.3. ábra

Az eddigiekben a tömegpont-rendszeren ható erőket „külső” és „belső” erőként osztályoztuk. A kapott eredmények ennek feleltek meg. A dinamikai problémák megoldásnál az erőknek egy másfajta osztályozása is lehetséges. csoportosítása is lehetséges kikerülhetetlenül újfajta osztályozási szempont is megjelenik. Ez a **szabad erő** és a **kényszererő** fogalma. Ez azt fogja eredményezni, hogy a tömegközéppont-tételben megjelenhetnek a **kényszererők is**.

Ekkor a kényszererők speciális tulajdonsága miatt egy új problémával találkozhatunk.

Ha a megfigyelőhöz (az inercia rendszerhez) képest a (vizsgált) rendszerre ható kényszererő nem mozog, akkor az ténylegesen nem végez munkát. Ugyanakkor a munkatételben megjelenhet egy hozzá kapcsolódó munkavégzés, amit „látszólagos” munkának fogunk nevezni. A legegyszerűbb példa erre az, ha egy guggoló ember feláll. A vizsgált mechanikai rendszer legyen maga az ember. A talaj az ember talpára egy \vec{F}_T , függőlegesen felfelé mutató, erővel hat. Ez nyilván egy kényszererő, mert abból a feltételből határozzuk meg, hogy a személy talpa nyugalomban marad. (Ha valakinek ez túl „bonyolult” kölcsönhatásnak tűnik, akkor az gondoljon egy kezdetben összenyomott rugóra, amelyik „felpattan a földről!”). A TKP mozgását az \vec{F}_T külső erő ismeretében kiszámíthatjuk. A munkatétel szerint az \vec{F}_T és gravitációs $\vec{F}_G = m\vec{g}$ erő együttes munkavégzése fogja megadni a TKP végső kinetikus energiáját. Nézzük a részleteket!

Jelölje ki a függőleges irányt a „+x” tengely. Ennek mentén mozog felfelé a TKP, amelynek helyzetét az $x(t)$ adja meg. Legyenek kezdeti feltételek a következők:

$$x(0) = 0 \text{ és}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

A TKP mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = F_T - mg$$

Elvégezve a az \dot{x} -al való szorzást, kapjuk, hogy.

$$m\dot{x}\ddot{x} = F_T\dot{x} - mg\dot{x}, \text{ azaz}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) = F_T\dot{x} - mg\dot{x}$$

Integrálás után pedig, a megadott kezdeti feltételek alapján az adódik, hogy

$$\frac{1}{2} m v_h^2 = F_T h - mgh \equiv W_T + W_G,$$

ahol „h” a TKP emelkedési magassága. Ha az ember magáll, azaz „h” már állandó marad, akkor a TKP-nek a végső sebessége zérus ($v_h = 0$), ekkor a két munka összegének is zérusnak kell lennie.

$$W_T + W_G = 0$$

Mivel pedig triviális, hogy a gravitációs erő munkája

$$W_G = -mgh \text{ ezért}$$

$$W_F = +mgh \geq 0$$

Ugyanakkor nyilvánvaló az is, hogy az \vec{F}_T „tényleges” munkát nem végzett. Tényleges munkát az izmunk összehúzódásakor végeztünk, amit az utólagos izomlázunk igazol.

Kissé érdekesebb a helyzet, ha egy emelkedő liftben állunk fel, vagy ami ugyanaz, egy mozgólépcsőn felmegyünk. Mechanikai rendszernek továbbra is az emberi testet tekintjük. Ekkor el is fáradunk, és a mozgólépcső motorja is több áramot fogyaszt. Ezen tényleges munkák együttes eredményként jutottunk egy emelettel feljebb. Az \vec{F}_T erőt most egy ún „időfüggő kényszerfeltétel” határozza meg. Hiszen a talpunknak (az egyenletes sebességgel, felfelé haladó) lépcsőfokokkal együtt, kell mozognia. A kérdés itt az, hogy a talpunkra ható \vec{F}_T erő munkája hogyan oszlik meg „látszólagos” és „tényleges” munkavégzésre. Ekkor a „tényleges munkavégzésért” a hajtómotor üzemeltetője, a „látszólagos munkavégzésért” a mi izomzatunk „fizet”. Az arányokat azonban már csak az \vec{F}_T pontos ismeretében tudjuk megmondani. Ehhez pedig meg kell oldani a mozgásegyenletet ekkor viszont munkatétel használata oka fogyottá válik.

Vegyünk egy másfajta, ugyancsak hétköznapi példát. Egy gépkocsi vízszintes úton egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A kocsira ható erők közül csak a vízszintes irányúakat fogjuk vizsgálni, hiszen függőleges irányban a kocsi nem mozog. A kereke érintkezzen állandóan a talajjal és ne csússzon meg soha. A kocsi nyugalomból indul és gyorsulását nyilván a kerék és a talaj közötti tapadó súrlódási erő okozza, így a TKP-tétel miatt írható, hogy

$$M\ddot{x}$$

A kocsi gyorsulása tehát $\ddot{x} = \dots$. Formálisan levezethető egy „munkatétel” a szokásos módon:

$$M\ddot{x} = F_s \hat{x}, \quad d\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2\right) =$$

Integrálás után, ha a kocsi x távolságot tett meg:

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 =$$

Mivel a kocsi nyugalomból indult, a t időpillanatban a sebessége $\dot{x} = \frac{F_s}{M}t$ és a megtett út $x = \frac{F_s}{2M}t^2$. Ezt beírva a munkatételbe ezt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{F_s}{M}t\right)^2 = F_s \frac{1}{2}t^2$$

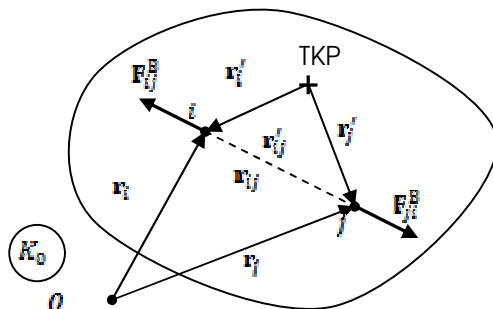
Látható, hogy az egyenlet két oldala megegyezik, tehát a levezetésünk matematikailag helyes. De vajon fizikailag helyesen értelmezzük a fenti tételünket? Hiszen senki sem gondolhatja azt komolyan, hogy a munkát az F_s tapadó súrlódó erő végezte, hiszen akkor miért kellett a benzinért fizetnünk. A munkát a motor végezte amely része a „pontrendszernek”. A benzinkútnál az elégetett benzinért fizettünk. A motor tehát a benzinmolekulákban lévő potenciális energiát az égés során majd a hengerben translációs mozgássá alakította egy termodinamikai körfolyamat során. Ez a munka aztán az F_s tapadó súrlódó erő közvetítésével változtatta meg a gépkocsi sebességét motorostól, benzinstől együtt. Az F_s tapadó súrlódó erő soha nem mozdul el a talajhoz képest így munkát sem végezhet. A nyilvánvaló fizikai hiba ott van, hogy inerciarendszertől nézve az F_s erő együtt megy a gépkocsival, hiszen a kerék tapadási pontja is „látszólag” a kocsival együtt mozog. Így **formálisan** a munkatétel „működni fog”. Mindaddig, amíg nem kell feltankolnunk a gépkocsinkat. Ekkor a tárgyalt munkatételünk fizikailag helytelen értelmezése a pénztárcánkon érezteti „irreverzibilis” hatását. Való igaz, hogy a tudás érték és ez néha aprópénzre is váltható.

Ezekben az esetekben tehát a TKP –re felírt munkatétel formálisan érvényes lesz. Fizikailag azonban nem, mert az **időfüggetlen kényszererők** nem végeznek munkát. Ezért a munkatétel fenti szétválasztása fizikailag csak akkor helyes, ha a külső erők között időfüggetlen kényszererők nem szerepelnek.

Az ilyen esetekben (mármint, amikor a külső erők között van kényszererő is) a munkatételnél csak az összevont alakot célszerű használni. Ekkor a külső (időfüggetlen) kényszererők munkája nulla és a szabad külső erők munkáját laborrendszerben kell meghatározni (ezért a munkatételben a \dot{x} helyett \dot{r} -t írunk), azaz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\dot{r}_{TKP}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i \dot{r}_i^2\right) = \frac{dW^K}{dt} + \dot{c}$$

Szavakban: ***a rendszer teljes kinetikus energiáját a külső és a belső (szabad) erők munkája változtatja meg.***



1.4.4. ábra

Fontos speciális eset, amikor belső erők konzervatív erők, azaz létezik egy belső potenciális energia. Azaz a használt fogalmakkal

$$P^B = \frac{dW^B}{dt} = -\frac{dV^B}{dt},$$

Ekkor az (1.4.10) egyenlet:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{\text{kin}}^B + V^B) = \frac{dW^{\text{TK}}}{dt},$$

ahol $\mathcal{E}^B = \mathcal{E}_{\text{kin}}^B + V^B$ a rendszer **teljes belső energiája**. Szavakban: **a pontrendszer teljes belső energiáját a külső erők TKP-ben végzett munkája változtatja meg.**

Az elmondottak a tömegpontrendszerek teljeskörű és (a modell keretein belül) pontos dinamikai leírását adják. Nézzünk erre két szemléltető példát. Először vegyünk egy véges nyugalmi hosszúságú csavarrugót, és nyomjuk össze úgy, hogy a közepe (TKP) helyben maradjon. Ekkor

$$d\mathcal{E}_{\text{kin}}^B + dV^B = dW^{\text{TK}}.$$

Ha feltesszük, hogy a részecskék belső kinetikus energiája az összenyomás alatt nem változott (nem melegedett fel a rugó) akkor

$$dV^B = dW^{\text{TK}},$$

azaz a rugón az összenyomáskor végzett (külső erőkből adódó) munka a rugóban a belső potenciális energia megnövekedését idézte elő. Ezt neveztük a **rugóban felhalmozódó rugalmas energiának**.

Második példaként vegyünk egy ideális gázt. Mint tudjuk ekkor a tömegpontok között nem lép fel hosszú távú kölcsönhatás, így a belső potenciális energia zérus.

$$d\mathcal{E}_{\text{kin}}^B = dW^{\text{TK}}.$$

A külső erőknek a TKP rendszerben végzett munkája kétféle lehet. Egyrészt van olyan, amelyik makroszkopikus elmozdulással jár, például amikor egy dugattyút mozgatunk. Ezt a munkát $p dV$ alakban írhatjuk (dV itt térfogatváltozást jelent). A másik fajta munkavégzés során a külső erők molekuláris szinten, rendezetlenül hatnak, azaz pl. a tartály falában lévő, rendezetlen mozgást (hőmozgást) végző atomokkal a gázmolekulák (egyenként) ütköznek. A tartály nem része a pontrendszernek, tehát az öböne lévő molekulák hatása külső erőnek számít. Ezt neveztük a termodinamikában δQ hőközlésnek. Ez nem eredményez egy makroszkopikus elmozdulást. Azaz írhatjuk, hogy

$$d\mathcal{E}_{\text{kin}}^B = \delta Q + p dV.$$

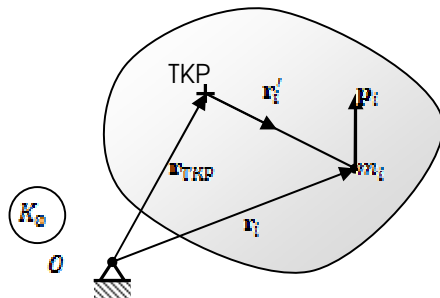
Megkaptuk tehát a termodinamika első főtételét, az ideális gázokra vonatkoztatva. Reális gázok (folyadékok és szilárd anyagok) esetén a részecskék közötti kölcsönhatás is van. Ezt a belső erők potenciális energiájaként kell kezelni. Ekkor kapjuk, hogy

$$d\mathcal{E}_{\text{kin}}^B + dV^B \equiv dU = \delta Q + p dV.$$

Fontos megemlíteni, hogy molekuláris (atomi) szinten minden erő konzervatív. Azaz csak kinetikus és potenciális energia létezik. Makroszkopikus skálán fellépő nem konzervatív erőhatás (pl. plasztikus deformáció) a mikroszkopikus skálán az atomi potenciális energiák és az atomi, rendezetlen mozgásból adódó kinetikus energiák közötti „átalakulásként” jelentkezik. A meghajlított drót ezét melegszik fel. Az ezzel kapcsolatos részleteket a *Statisztikus Fizika* tárgyalja.

1.4.5. Tömegpont-rendszerek perdülettétele

A következőkben pontrendszerek perdületét vizsgáljuk. A pontrendszer perdületét az egyes tömegpontok perdületének az összegeként definiáljuk. Nem szabad elfelejteni, hogy egy tömegpont perdülete mindig egy adott pontra vonatkoztatva adható meg.



1.4.5. ábra

Tekintsünk az álló (labor) rendszerben egy fix O pontot (legyen ez a labor rendszer origója) és adjuk meg a pontrendszernek az erre vonatkozó L_O perdületét:

$$L_O = \sum_{i=1}^N L_i, \quad L_i = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Az L_O perdület további, igen szemléletes részekre bontható. Már láttuk, hogy a pontrendszer pontjainak a helyzete a TKP-hez képest is megadható, azaz

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{TKP} + \mathbf{r}'_i.$$

A pont sebessége tehát

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_{TKP} + \dot{\mathbf{r}}'_i.$$

Ezért az i -ik tömegpont O origóra vett perdülete:

$$L_i = (\mathbf{r}_{TKP} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_{TKP} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \mathbf{r}_{TKP} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{TKP} + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{TKP} + \mathbf{r}_{TKP} \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (1.4.11)$$

Ennek megfelelően a rendszer L_O perdülete négy darab szumma összegeként írható fel. Ezek a következők:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{TKP} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = \mathbf{r}_{TKP} \times M \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = L_O^{TKP}$$

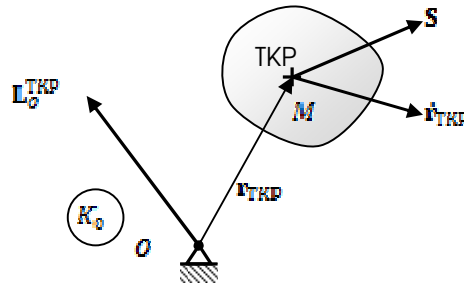
$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = \dot{\mathbf{r}}_{TKP} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{TKP} \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{r}_{TKP} \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = L_{TKP}' \equiv S.$$

A második és a harmadik szummában kihasználtuk az (1.4.6) összefüggést. Azt kaptuk tehát, hogy a pontrendszer perdülete két perdület összegeként adható meg:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_O^{\text{TKP}} + \mathbf{S}.$$



1.4.6. ábra

Az $\mathbf{L}_O^{\text{TKP}}$ a tömegközéppontnak az origóra vett perdülete. Részletesebben a TKP-ban lévő, vele együtt mozgó M tömegű pontnak az O origóra vett perdülete. Az \mathbf{S} az ún. **belső perdület** vagy **spin**. Ez a tömegpontoknak a TKP rendszerben, a TKP-re vett perdülete.

Az \mathbf{L}_O perdület időbeli változásának a meghatározásához természetesen a mozgásegyenletből kell kiindulni. Mint azt tudjuk, ez egy tömegpont esetén (legyen ez az i -edik) a következő:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

Ahol $\mathbf{p}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ és $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B$. Összegezve a rendszer tömegpontjaira:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B). \quad (1.4.12)$$

A (1.4.12) egyenlet bal oldala az előzőek szerint:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{\text{TKP}} + \mathbf{S}) = \mathbf{L}_O^{\text{TKP}} + \dot{\mathbf{S}}.$$

Az (1.4.12) egyenlet jobb oldalán a szummában lévő kifejezés tovább bontható:

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B) = (\mathbf{r}_{\text{TKP}} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{F}_i^K + \mathbf{F}_i^B) = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}_i^K + \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}_i^B + \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^K + \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^B.$$

Elvégezve a szummázást, eredményül négy tag összegét kapjuk:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}_i^K = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}^K,$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}_i^B = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^B = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = 0, \quad (\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji})$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^K = \mathbf{M}_{\text{TKP}}^K,$$

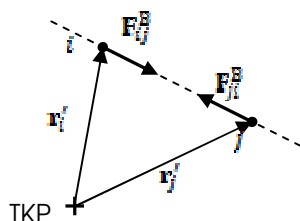
(FIGYELM! $M_{TKP}^K \equiv N_{TKP}^K$ az erő forgató nyomatéka!!)

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Az utolsó tag kiértékelése azzal a módszerrel történhet, amelyet már a munkatétel tárgyalásakor követtünk (lásd (1.4.9)). Azaz

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_{ij}^B &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_{ij}^B + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j' \times \mathbf{F}_{ji}^B \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_{ij}^B + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_j' \times \mathbf{F}_{ji}^B \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_{ij}^B + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_j' \times (-\mathbf{F}_{ij}^B) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j') \times \mathbf{F}_{ij}^B \right) = 0. \end{aligned}$$

Centrális erők esetén ugyanis az $\mathbf{r}_{ij}' \equiv \mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j'$, távolságvektor és a kölcsönhatást megadó \mathbf{F}_{ij}^B erő párhuzamos egymással. Ezért a vektori szorzatuk nulla. Tehát a negyedik tag is kiesett.



1.4.7. ábra

(1.4.12)-ből végül is azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{L}_O^{TKP} + \mathbf{S} = \mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{F}^K + \mathbf{M}_{TKP}^K. \quad (1.4.13)$$

Ez az egyenlet tovább egyszerűsíthető, ugyanis a TKP tétel miatt

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = \mathbf{F}^K,$$

azaz

$$\mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = \mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{F}^K.$$

Az egyenlet bal oldalán a deriválás „kiemelhető” és így kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TKP}) = \mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{F}^K.$$

Azaz a TKP-tétel értelmében a zárójelben a TKP-nek az O -ra vett perdülete található és így

$$\mathbf{L}_O^{TKP} = \mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{F}^K.$$

Ezért az (1.4.13) egyenlőségben a két oldal első tagjai kiejtik egymást. Így adódik, hogy

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_{TKP}^K, \quad \text{(FIGYELM! } M_{TKP}^K \equiv N_{TKP}^K \text{ az erő forgató nyomatéka!)}$$

azaz részletesen kiírva:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i' \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^K.$$

Szavakban: *egy pontrendszer belső perdületét (spinjét) a külső erőknek a TKP-re vett forgatónyomatéka változtatja meg (bármilyen módon mozogjon is a TKP a labor rendszerben!).*

1.4.6. Összefoglalás

Érdemes lesz az előzőekben kapott eredményeket röviden összefoglalni.

A tömegközéppont-tétel:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_{TKP} = \mathbf{F}^K,$$

Az impulzustétel:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}^K,$$

A perdülettétel:

$$\mathbf{L}_O^{\text{TKP}} = \mathbf{r}_{\text{TKP}} \times \mathbf{F}^K,$$

A munkatétel (differenciális alakban):

$$d\left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2\right) = \mathbf{F}^K \cdot d\mathbf{r}_{\text{TKP}}.$$

$$d\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

A munkatétel külső kényszererők esetén nem szeparált formában:

$$d\left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^K \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^B \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

1.5. Merev testek dinamikája

1.5.1. Merev testek kinematikája

a) A merev test fogalma

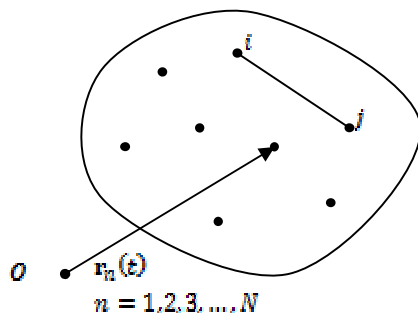
A pontrendszerek általános tárgyalása után speciális rendszerekkel fogunk foglalkozni. A minket körülvevő világban (makroszkopikus mérettartományban) sokféle pontrendszerrel találkozunk. Az első tapasztalati benyomás, amely alapján ezek elkülönülnek egymástól az a halmazállapotuk. Azaz beszélünk **szilárd**, **folyékony** és **légnemű** halmazállapotú „testekről”. Természetesen, a részletek tanulmányozása egy sokkal gazdagabb világot tár fel előttünk, de az első lépésként halmazállapot szerinti osztályzás összhangban van a mindennapi tapasztalatainkkal.

Szilárd halmazállapot → merev testek dinamikája

Szilárd halmazállapot	→	rugalmas anyagok dinamikája	} deformálható testek dinamikája
Folyadék halmazállapot	→	folyadékok dinamikája	
Gáz halmazállapot	→	gázok dinamikája	

Merev testnek nevezzük azt a pontrendszert, amelyben bármelyik két pont egymástól mért távolsága időben állandó, azaz:

$$\frac{\partial}{\partial t} r_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = 0, \quad \forall i, j.$$



1.5.1. ábra

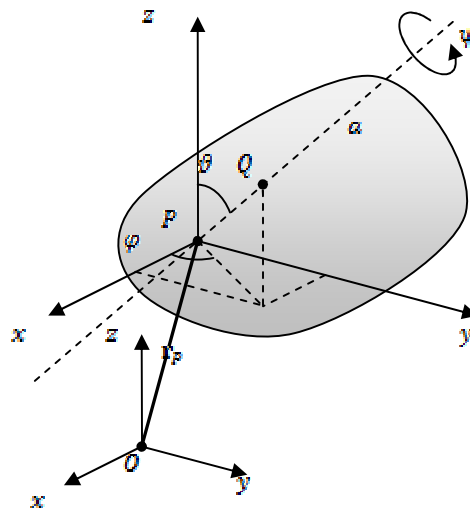
Tehát a tömegpontok koordinátái nem függetlenek egymástól, rájuk a fenti előírásoknak teljesülnie kell. Ezeket **kényszerfeltételeknek** nevezzük. Anélkül, hogy most belemennénk a kényszerfeltételek milyenségének és számának az elemzésébe, elemi megfontolásokkal kiszámíthatjuk, hogy hány skalár adat kell egy merev test helyzetének a megadásához.

Tapasztalati tény, hogy egy merev test helyzetét három (nem egy egyenesbe eső) pontjának a helyzete egyértelműen meghatározza (lásd: háromlábú szék). Mivel a három pontnak az egymástól való távolsága

állandó, ez 3 darab kényszerfeltételt jelent. Mivel a három pontot 9 darab Descartes koordináta adja meg, ezért a merev test helyzetét összesen $9 - 3 = 6$ darab független skalár adat egyértelműen meghatározza. Azt mondjuk, hogy egy merev test (**mechanikai**) **szabadságfoka** $f = 6$.

A 6 darab skalár mennyiség megadásában viszonylag nagy szabadságunk van. Ezért ezeknek a definiálásakor elsősorban praktikus szempontokat veszünk figyelembe. Célszerű követnünk a merev test mozgásának speciális formáit, azokat, amelyeket a hétköznapi (technikai) életben is tapasztalunk. Így a merev test mozgásoknak igen szemléletes osztályozásához jutunk.

A következőkben a merev test mozgását mindig egy állónak tekintett vonatkoztatási rendszerhez (inerciarendszerhez) viszonyítva vizsgáljuk. Ezt külön már nem fogjuk mondani. Ha rögzítjük a merev test egy P pontját, akkor a test csak ezen pont körül mozoghat. Ezt nevezzük a merev test **rögzített pont körüli mozgásának**. A P pont helye három (x_P, y_P, z_P) Descartes koordinátával jelölhető ki. Ha rögzítjük a merev test egy másik Q pontját is, akkor a merev test csak a PQ egyenes által meghatározott a tengely körül foroghat. Ezt nevezzük **rögzített tengely körüli forgásnak**. A a tengely helyzetét (az álló koordinátarendszerhez képest) a gömbi koordinátáknál használatos ϑ és φ szögek adják meg. Ha most rögzítjük a a körüli elfordulás ψ szögét is, akkor a merev test már semmiféle mozgást nem fog végezni. A helyzetét tehát 6 darab adat egyértelműen meghatározza: $x_P, y_P, z_P, \vartheta, \varphi$ és ψ .



1.5.2. ábra

Könnyen belátható, hogy az így bevezetett ϑ, φ, ψ szögek lényegében a más módon definiálható ún. **Euler-szögekkel** egyeznek meg (**majdnem!**).

Látható tehát, hogy a merev testnek egy rögzített pont körüli mozgása azt jelenti, hogy mindhárom szög változik az időben. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a merev test egy, időben változó helyzetű, „ $a\{\vartheta(t), \varphi(t)\}$ ” tengely körül forog $\{\psi(t)\}$. Az ilyen fajta mozgást **pörgettyűmozgásnak** nevezzük. Mint azt majd látni fogjuk, a három darab szög a dinamika szempontjából nem egyenértékű.

A pörgettyűmozgás tanulmányozása a merev testek dinamikájának egyik legbonyolultabb és egyben legérdekesebb területe. Az érdekessége abban van, hogy egy pörgettyű a külső erőhatásokra nem az általunk „szubjektíve várt” módon reagál. Ennek oka tisztán pszichológiai, ugyanis a hétköznapijaink során a minket körülvevő, emberléptékű, természetes környezetünkben kevés számú pörgettyűvel találkozunk. Így nem alakulhatott ki ezen mozgást illetően semmiféle szemléletünk. Ezért a pörgettyű reakcióját a „nemforgó” testeknél nyert tapasztalataink alapján képzeljük el. A „csalódásunk” szembeszökő lesz. Mindezekről a Kísérleti Fizika során már némi benyomást szerezhettünk.

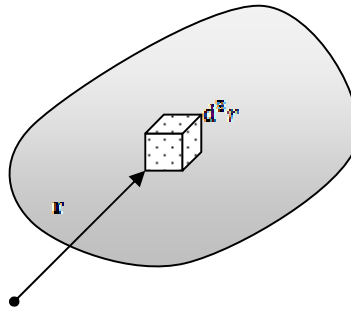
A merev test mozgásának a részletesebb tanulmányozásáért a legegyszerűbbel, a rögzített tengely körüli forgással kezdjük. Majd ezután rátérünk a sokkal bonyolultabb pörgettyűmozgásra.

b) A merev test forgása

A hétköznapjainkban jelen lévő merev testek tömegpontjait érdemes a testet alkotó „atomokkal” illetve „molekulákkal” azonosítani. Ezeket a makroszkopikus mozgás szempontjából „szerkezet nélküli” tömegpontoknak lehet tekinteni. Ezek száma $N = 6 \cdot 10^{23}$ nagyságú. A számítások könnyítése végett célszerű az ún. **kontinuum anyagmodell**t használni. Azaz a merev test anyagát egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségű folytonos közegnek fogjuk tekinteni. Ekkor:

$$dm = \rho(\mathbf{r}) d^3r,$$

ahol dm az \mathbf{r} hely körüli d^3r térfogatban lévő anyag tömegét jelenti. Ekkor a pontrendszereknél használt $\sum_{i=1}^N \dots$ összegezés helyett a sokkal egyszerűbb $\int \dots d^3r$ térfogati integrálásra térhetünk át. A kontinuum anyagmodell lényege az, hogy a d^3r térfogatot a makroszkopikus méretekhez képest infinitezimálisnak (majdnem nulla nagyságúnak), de ugyanakkor a mikroszkopikus skálán még „elég nagyoknak” választjuk, ahhoz, hogy igen sok atom legyen benne.



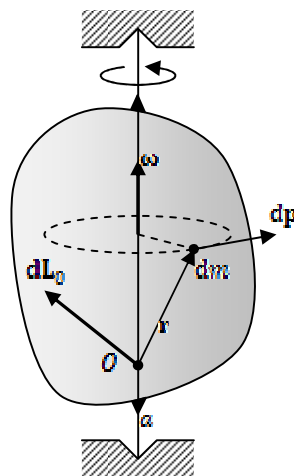
1.5.3. ábra

Tekintsünk egy merev testet, amelyik egy rögzített α tengely körül forog. A merev test minden pontja körmozgást fog végezni. Mindegyik körpálya középpontja az α tengelyen van. Bármelyik körpálya R sugarát az illető tömegpontnak az α -tól vett távolság adja meg. Célszerű lesz a merev test minden pontjának az \mathbf{r} helyvektorát az α tengely egy O pontjától mérni. Mivel minden pont körmozgása ugyanazzal az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektorral adható meg, ezért az egész merev test forgómozgását is magával a (rögzített α tengellyel egybeeső) $\boldsymbol{\omega}$ -val lehet jellemezni.

1.5.2. Rögzített tengely körül forgó merev test dinamikája

a) Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

Számítsuk ki a merev testnek az α forgástengely egy (álló) O pontjára vett perdületét. Ez a pont bárhol lehet a tengelyen. Célszerű azonban úgy megválasztani, hogy a segítségével a tengely „csapágyazásánál” fellépő erők könnyen kiszámíthatók legyenek.



1.5.4. ábra

A pontrendszereknél tanultak szerint a merev test perdülete az őt alkotó tömegpontok perdületének a vektori összege. Jelen esetben tehát:

$$d\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times d\mathbf{p},$$

ahol $d\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \cdot dm$. Tudjuk, hogy $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, azaz

$$d\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot dm.$$

Ezért aztán

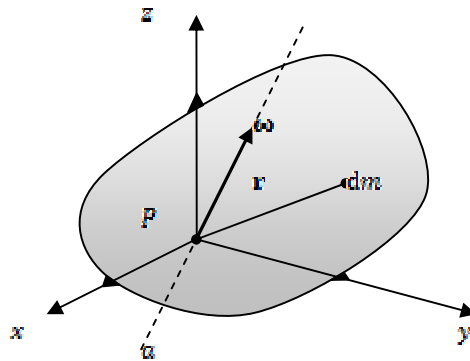
$$\mathbf{L}_0 = \int_{\text{test}} d\mathbf{L}_0 = \int_{\text{test}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \rho(\mathbf{r}) \cdot d^3r. \quad (1.5.1)$$

Látható, hogy az integrálás során az \mathbf{r} változó „eltűnik” és az \mathbf{L} perdületvektor az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektor lineáris függvénye lesz. Két vektor közötti lineáris kapcsolatot (azaz egy lineáris vektor-vektor függvényt) **tenzornak** nevezzük, azaz:

$$\mathbf{L}_0 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ neve **tehetetlenségi (nyomaték) tenzor**. Jelen esetben az O ponthoz tartozó (az O pontban lévő) tehetetlenségi tenzor.

Nyilvánvaló, hogy a merevtest bármely pontjában megadható egy tehetetlenségi tenzor. Sőt, általában az sem kell, hogy ez a pont a test egy anyagi pontja legyen. Az (1.5.1) egyenlet értelmében tehetetlenségi tenzor bármely, a testhez képest álló ponthoz tartozóan megadható. Mint azt majd a későbbiekben látni fogjuk, különösen hasznos a tömegközépponthez tartozó $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{TKP}}$.



1.5.5. ábra

A következőkben a tehetetlenségi tenzor általános (algebrai) tulajdonságait fogjuk megtárgyalni.

Válasszunk ki egy, a merev testhez képest álló P pontot és határozzuk meg az ehhez a ponthoz tartozó (ebben a pontban értelmezett) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tenzort. Rögzítsünk a merev testhez egy xyz Descartes-koordinátarendszert. Az (1.5.1) egyenletből látható, hogy koordinátarendszer origója a P pont kell, hogy legyen. Ugyanakkor, az x, y, z koordinátatengelyek helyzete tetszőlegesen jelölhető ki, hiszen ezt semmiféle fizikai effektus nem determinálja. A szokásos módon itt célszerű a matematikai egyszerűségekre törekedni. A merev test bármely \mathbf{r} pontját az (x, y, z) koordináták adják meg. Az (1.5.1) egyenletnek megfelelően a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tenzornak az algebrai alakja egy 3×3 -as mátrix lesz, amelynek mátrixelemeit θ_{ij} -vel jelöljük ($i, j = x, y, z$).

A következőkben ezeket a mátrixelemeket fogjuk meghatározni. Legyenek az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektor Descartes-komponensei $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Ekkor az elemi perdületvektor

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot dm = [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] \cdot dm.$$

Itt felhasználtuk a vektoralgebrában jól ismert azonosságot, amely a kétszeres vektorszorzatot skalárszorzatok összegére alakítja át. A $d\mathbf{L}$ -t célszerű oszlopvektor alakjában felírni, azaz $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ és (x, y, z) ismeretében

$$\begin{bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 \omega_x - x(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ r^2 \omega_y - y(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ r^2 \omega_z - z(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \cdot dm.$$

Beríva ebbe az $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$ kifejezést adódik, hogy:

$$\begin{bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r^2 - x^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -xy\omega_x + (r^2 - y^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -xz\omega_x - yz\omega_y + (r^2 - z^2)\omega_z \end{bmatrix} \cdot dm.$$

Ami (felismerve a mátrixszorzást) a következő alakba írható:

$$\begin{bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{bmatrix} = dm \cdot \begin{bmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Elvégezve az integrálást kapjuk, hogy:

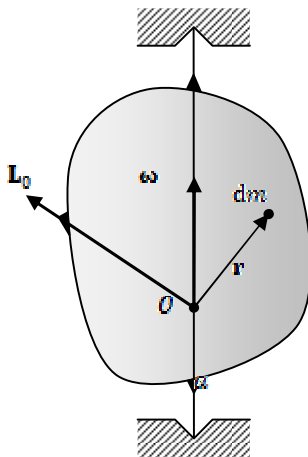
$$\begin{bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\theta_{xx} & -\theta_{xy} & -\theta_{xz} \\ -\theta_{yx} & +\theta_{yy} & -\theta_{yz} \\ -\theta_{zx} & -\theta_{zy} & +\theta_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},$$

Ahol

$$\theta_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \cdot dm, \quad \theta_{xy} = \int_V xy \cdot dm,$$

és a többi elem ciklikus cserével megkapható. Látható, hogy θ_{ij} egy szimmetrikus mátrix. Ennek a későbbiek során fontos szerepe lesz. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy **a $\boldsymbol{\theta}$ tehetetlenségi tenzor csak a test geometriájától függ.** Ebből viszont az is következik, hogy a test különböző pontjaihoz tartozó $\boldsymbol{\theta}$ -k között kapcsolatnak kell lenni. Ez valóban így is van. Bár ezek igen egyszerű algebrai formában megfogalmazhatók, mégis általános esetben a használatuk meglehetősen számolásigényes. Az előtanulmányainkból ismert **Steiner tétel** a legegyszerűbb ezen átszámítások között. Ez azonban csak az egymással párhuzamos tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok között adja meg a kapcsolatot.

b) Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája



1.5.6. ábra

Mint azt láttuk, ha egy merev test egy megadott \mathbf{a} rögzített tengely körül forog, akkor minden pontja körmozgást végez, vagy áll, ha a pont éppen a forgástengelyen van. Minden pontjának a szögsebessége ugyanaz az $\boldsymbol{\omega}$. A tömegpontok sebessége a már megismert módon $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ alakba írható. Ez csak akkor igaz, ha az \mathbf{r} helyvektorokat az \mathbf{a} forgástengelyen, de azon tetszőlegesen lévő pontból mérjük. Legyen ez most is az \mathbf{O} pont. Így egy elemi dm tömeg(pont) kinetikus energiája

$$dE_k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \cdot dm.$$

A sebességvektor négyzete felfogható egy „háromas szorzatnak”, ugyanis írható, hogy

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Ez pedig minden ciklikus cserére invariáns, azaz

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})].$$

Ezt beírva az elemi kinetikus energia kifejezésébe, majd integrálva a teljes merev testre adódik, hogy:

$$E_K = \int_{\text{test}} dE_K = \int_{\text{test}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \cdot dm.$$

Mivel minden pont szögsebessége állandó, így az az integrálásból kiemelhető, így a következő eredményre jutunk:

$$E_K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\text{test}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot dm.$$

A megjelenő integrál már ismerős, hiszen ez éppen a forgó merev test \mathbf{L}_O perdülete, amely a tehetetlenségi tenzorral is felírható:

$$\mathbf{L}_O = \hat{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad E_K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ez mátrix alakban is megadható. Az előzőekből tudjuk, hogy ehhez a merev testhez rögzített xyz Descartes-koordinátarendszert kell felvennünk, amelynek origója (most) az O pontban van. Ekkor kapjuk, hogy

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \theta_{ij} \omega_i \omega_j,$$

ahol ω_x , ω_y és ω_z a test forgását megadó $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektor komponensei **a merev testhez rögzített** (szóban forgó) koordinátarendszerben. Az eredménynek van egy szembeszökő érdekessége. Tudjuk, hogy $\boldsymbol{\omega}$ komponensei nem függenek attól, hogy az O pont az α forgástengelyen hol helyezkedik. Ezek a komponensek csak a koordinátatengelyek irányától függenek, de úgy, hogy az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektor mindig az álló α forgástengelybe essen. Ebből következik, hogy ha a Descartes-koordinátarendszerünket (forgatás nélkül) eltoljuk az α tengely mentén, akkor a kinetikus energiának nem szabad megváltoznia. Ez azt jelenti, hogy az eltolás során a θ_{ij} mátrixelemek úgy transzformálódnak hogy kinetikus energiában megjelenő súlyozott összeg ne változzon.

Ez a fizikai eredmény még szemléletesebbé tehető egy régi-új fogalomnak, a tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéknak a bevezetésével. Legyen az α forgástengely irányát kijelölő egységvektor \mathbf{e}_α . Ekkor nyilvánvalóan $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_\alpha$. Azaz (1.5.1) alapján írható, hogy

$$E_K = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \mathbf{e}_\alpha \hat{\boldsymbol{\theta}}_O \mathbf{e}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \omega^2 \theta_\alpha.$$

Mivel a kinetikus energia skalár mennyiség, ezért a $\theta_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \hat{\boldsymbol{\theta}}_O \mathbf{e}_\alpha$ -nak is skalárnak kell lennie. Ezt a θ_α mennyiséget nevezzük az **α tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéknak**. Ezzel megkapjuk a már régebről jól ismert kifejezésünket:

$$E_K = \frac{1}{2} \theta_\alpha \omega^2.$$

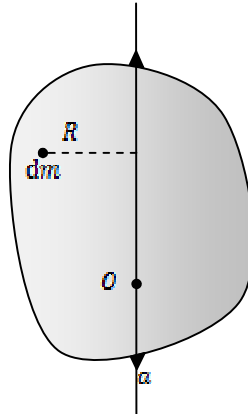
Ennek a fogalomnak a segítségével a θ_{ij} mátrixelemek szemléletes fizikai jelentése lesz. Legyen például a forgástengely maga az x tengely. Ekkor a definíciónk szerint az x tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték a következő lesz:

$$\theta_x = \mathbf{e}_x \hat{\boldsymbol{\theta}}_O \mathbf{e}_x = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} +\theta_{xx} & -\theta_{xy} & -\theta_{xz} \\ -\theta_{yx} & +\theta_{yy} & -\theta_{yz} \\ -\theta_{zx} & -\theta_{zy} & +\theta_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_{xx} = \int_{\text{test}} (y^2 + z^2) \cdot dm.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy $y^2 + z^2$ éppen a test pontjainak az x tengelytől vett R távolságát adja. Tehát a test egy bármelyik O pontjához tartozó tehetetlenségi mátrix főátlójában lévő elemek megadják a test O pontján átmenő x , y és z tengelyekre vett tehetetlenségi nyomatékokot. Bármely ponton átmenő, bármely irányú α tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték az x tengelyhez hasonlóan számolható, azaz

$$\Theta_a = \int_{\text{test}} R^2 \cdot dm,$$

ahol R az a tengelytől vett távolságot adja. Ez valóban változatlan marad, ha a merev testet az a tengely mentén eltoljuk.



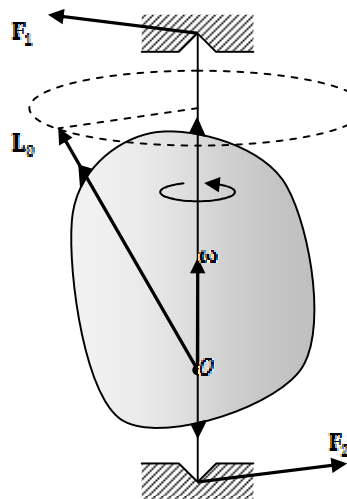
1.5.7. ábra

A mellékátlóban lévő Θ_{ij} , $i \neq j$ mátrixelemek neve **deviációs nyomatékok**. Az elnevezés eredete forgó merev test dinamikájában keresendő. Erre még visszatérünk.

Tudjuk azt, hogy a rögzített tengely körül forgó merev test mozgását megadó ω szögsebesség-vektor a „forgástengelyben van”. Azaz az ω vektor mind az inerciarendszerben, mind pedig a forgó testhez rögzített rendszerben állandó. Ugyanakkor a tehetetlenségi tenzor definíciójából következik, hogy az $\mathbf{L}_O = \tilde{\Theta}_O \cdot \omega$ (időfüggetlen) formában felírt lineáris kapcsolat csak a merev testhez rögzített rendszerben igaz. Ez azonban azt jelenti, hogy az álló rendszerből szemlélve az \mathbf{L}_O perdületvektor a merev testtel együtt forog. Azaz nem állandó. A pontrendszereknél tanult perdület tétel értelmében

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{N}_O,$$

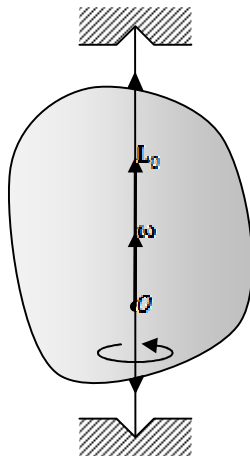
ahol \mathbf{N}_O a külső erőknek a (tengelyen kijelölt) O pontra számított forgatónyomatéka. Mivel most a perdület nem állandó, ezért kell, hogy a tengelyekre külső erők hassanak. Ez valóban így is van. A leírt mozgást a tengely csapágyain ébredő erők biztosítják. Azaz a tengely „rögzítéséhez” külső erőhatás kell. Erről mindenki maga is meggyőződhet, nem kell hozzá más, csak egy krumplici és egy kötőtű.



1.5.8. ábra

c) Szabad tengely körül forgó merev test

A mindennapi életben azt is tapasztalhatjuk (sőt, például a gépkocsi kerekeinél direkt erre törekszünk), hogy bizonyos esetekben a rögzített tengely körüli forgáskor nem hat külső erő. Ez akkor lép fel, ha az \mathbf{L} perdületvektor az álló rendszerben állandó. Az előbbieik értelmében ez csak úgy lehetséges, ha \mathbf{L} is a forgástengelyben van, azaz egybeesik $\boldsymbol{\omega}$ -val.



1.5.9. ábra

De ez azt jelenti, hogy ez az „egybeesés” a merev testhez rögzített rendszerben is fennáll. Azaz:

$$\mathbf{L}_0 = \tilde{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_0 \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.5.2)$$

ahol Θ_0 egy állandó. A kérdés mármost az, hogy ez miként lehetséges? Azaz a matematikai modellünk hogyan adja vissza a szóban forgó tapasztalati tényt. A választ maga az (1.5.2) egyenlet tartalmazza. Felismerhető ugyanis, hogy ez nem más, mint egy (a lineáris algebrában megtanult) sajátérték-egyenlet, ahol mind az $\boldsymbol{\omega}$, mind pedig a Θ_0 ismeretlennek tekintendő. Azaz keressük a

$$\tilde{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_0 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

egyenletet kielégítő $\boldsymbol{\omega}$ sajátvektor(oka)t és a hozzájuk tartozó Θ_0 sajátértékeket. Ennek feladatnak a megoldása igen egyszerű, hiszen mátrix alakban felírva

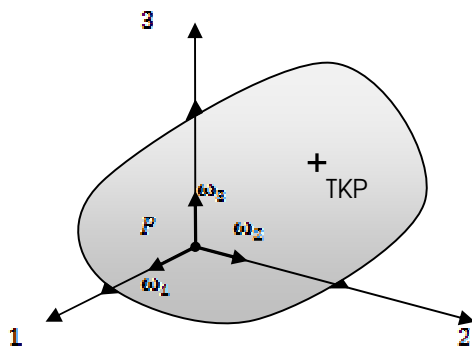
$$\begin{bmatrix} +\Theta_{xx} & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & +\Theta_{yy} & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & +\Theta_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \Theta_0 \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},$$

ami átrendezés után a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} +\Theta_{xx} - \Theta_0 & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & +\Theta_{yy} - \Theta_0 & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & +\Theta_{zz} - \Theta_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek (ω_i -k az ismeretlenek) akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az ω_i -k együtthatóiból képzett determináns értéke zérus. Ez Θ_0 -ra nézve egy harmadfokú (egy ismeretlenes) egyenletet ad. Ennek (általános esetben) három különböző megoldása lesz. Jelölje ezeket $\Theta_0 = \{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$. Ezekhez a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3\}$ -mal jelölhetjük. Mint azt a lineáris algebrából tudjuk, ezek a sajátvektorok merőlegesek egymásra.

A fenti eljárás a merev test bármelyik pontjához rögzített Descartes-rendszerben elvégezhető. Természetesen, az eredmény mindig más lesz, hiszen a tehetetlenségi tenzor függ attól, hogy a merev test mely pontjában vagyunk.



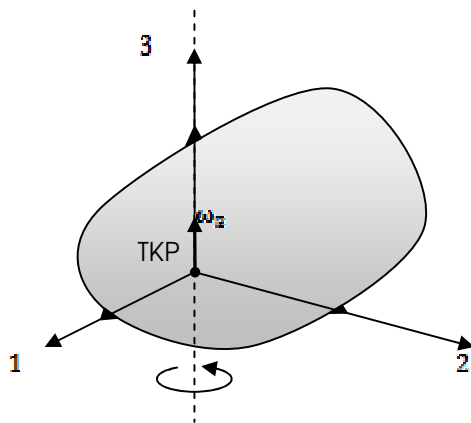
1.5.10. ábra

Ekkor felvehető egy olyan koordinátarendszer, amelynek tengelyei éppen az $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ sajátvektorokkal párhuzamosak. Ezeket a tengelyeket **tehetetlenségi főtengelyeknek**, a koordinátarendszert **főtengely-rendszernek** (FTR) nevezzük. Ekkor megkülönböztetés végett általában az x, y, z helyett a főtengelyeket **1, 2, 3**-al jelöljük. Ebben a főtengely-rendszerben felírt tehetetlenségi tenzor diagonális mátrix lesz, melynek főátlójában éppen a $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ sajátértékek lesznek, azaz

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Mindezekből nyilvánvalóan következik az, hogy **ha egy merev testet bármely pontján átmenő olyan tengely körül forgatjuk, amelyik egybeesik valamelyik tehetetlenségi főtengellyel, akkor a forgástengelyre ható külső erők nyomatéka zérus lesz.** Ez természetesen még nem jelenti azt, hogy a tengelyeken nem hatnak erők, csak azt, hogy ezek nyomatékának az összege zérus. Ez a pontrendszereknél tanultak alapján könnyen belátható. Ha ugyanis a forgástengely (amely tehetetlenségi főtengely) nem megy át a tömegközépponton, akkor a test tömegközéppontja egy körpályán fog mozogni. A tömegközéppont-tétel miatt a tömegközéppont centripetális gyorsulását a merev testre ható külső erők biztosítják. Ezek természetesen ismét csak a csapágyakon hatnak, de az adott P pontra vett eredő forgató nyomatékuk nulla lesz.

Az elmondottakból az is következik, hogy **ha a merev testet egy tömegközéppontján (TKP) átmenő főtengely körül forgatjuk, akkor a tengelyre semmiféle külső erő nem fog hatni.** Az ilyen tengelyeket **szabad tengelynek** nevezzük. A megadott feltételek miatt minden merev testnek (bármilyen alakú és tömegeloszlású is legyen) három szabad tengelye van. Ezek a **tömegközépponti tehetetlenségi főtengelyek**.



1.5.11. ábra

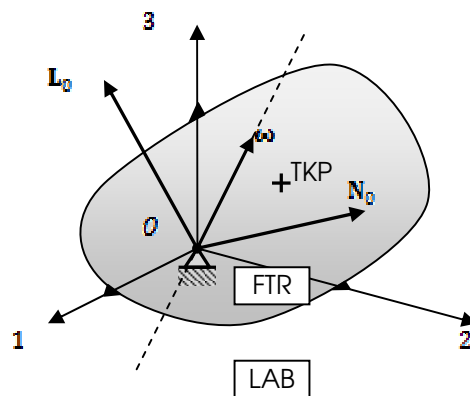
Mindebből az is látszik, ha egy merev testet itt a Földön eldobunk, akkor a tömegközéppontja a jól ismert ferde hajítás pályáját követi és a test olyan módon úgy forog, hogy a (kezdeti feltételek által meghatározott) perdülete állandó maradjon. Azaz $\vec{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \vec{\omega} = \text{állandó}$. Ez sokszor csak úgy teljesül, hogy a pillanatnyi forgástengely állandóan változik, azaz $\omega(t)$ időfüggő lesz. Ha a test éppen valamelyik valamelyik szabad tengelye körül forog, akkor a szabad mozgás során test szögsebessége is állandó marad. Könnyen belátható,

hogy szabályos testek esetén minden szimmetriatengely egyben főtengety is. Vannak olyan esetek amelyeknek a tömegközépponti rendszerben felírt tehetetlenségi mátrixának csak egy darab sajátértéke van, azaz $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_0$, ekkor minden (a tömegközépponton átmenő) tengely szabad tengely lesz. Ekkor az elhajított test minden(TKP-i) tengely körül állandó szögsebességgel fog forogni.

Az egyik ilyen triviális példa a homogén gömb. Ez a térbeli pályán való mozgása mellett bármelyik geometriai tengelye körül szabadon foroghat. Az ω irányát a kezdeti feltételek határozzák meg. Az asztali teniszben és a labdarúgásban használt „pörgetési” és „csavarási” technikák változatossága éppen ezen alapszik, a nézők és a játékosok legnagyobb öröme. A másik példa a (homogén) dobókocka. Ez is úgy viselkedik, mint a gömb, azaz bármilyen irányú (a tömegközépponton átmenő) tengely körül szabadon tud forogni, a kockajátékosok nagy bánatára.

1.5.3. Rögzített pont körül forgó merev test dinamikája (a pörgettyű mozgás)

Tekintsünk egy merev testet, amelyik egy adott (rögzített) O pontja körül szabadon foroghat. Ha az O nem a TKP és a test gravitációs térben van, akkor ún. **súlyos pörgettyűről** beszélünk.



1.5.12. ábra

Vegyük fel az O pontban a testhez rögzített főtengety-rendszert. Forogjon a test (az O pont körül) egy ω szögsebességgel. Főtengety rendszerben a test O -ra vett L_O perdülete és a szögsebessége között a jól ismert összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{L}_O = \tilde{\Theta}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_{O,FTR}.$$

A későbbiek jobb áttekinthetősége miatt jeleztük, hogy a perdület FTR-ben értendő. Azaz mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}_{FTR} = \begin{bmatrix} +\Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & +\Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & +\Theta_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Az állónak tekintett inerciarendszert sokszor **labor rendszernek** (LAB) is szoktuk nevezni. Az O pont ebben (is) álló pont, tehát érvényes rá az (egyszerű alakú) impulzummomentum-tétel, azaz

$$\dot{\mathbf{L}}_{O,LAB} = \mathbf{N}_O. \quad (1.5.3)$$

Az álló laborban mérhető $\mathbf{L}_{O,LAB}$ és a hozzá képest ω szögsebességgel forgó (testhez rögzített) főtengety rendszerben definiált $\mathbf{L}_{O,FTR}$ között a következő összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{L}_{O,LAB} = \mathbf{L}_{O,FTR} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_{O,FTR}. \quad (1.5.4)$$

Az jobb oldalon lévő első tag abból adódik, hogy FTR-ben a perdületvektor a külső erőhatások miatt időben változhat. A megjelölt második tag azért lépett fel, mert egy álló rendszerből egy forgóra tértünk át. Ennek magyarázata a következő. Az ω szögsebesség-vektor bevezetésekor láttuk, hogy a körpályán mozgó részecske sebessége $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ szerint számolható. Ez pedig a mostani jelölésünkkel nyilvánvalóan felírható így is:

$$\dot{\mathbf{L}}_{LAB} = \dot{\mathbf{L}}_{FORG} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_{FORG}.$$

Mivel most a ponthoz rögzített (forgó) rendszerben a tömegpont áll, ezért triviális, hogy $\dot{\mathbf{L}}_{FORG} = \mathbf{0}$, azaz

$$\dot{\mathbf{L}}_{LAB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_{FORG}.$$

ami ekvivalens a $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ kifejezéssel. Belátható, hogy minden, a tömegpont mozgásából definiált vektorra, (például \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$, \mathbf{p} , \mathbf{L} , ...) a fenti transzformációs eljárás helyes lesz. Ezt használtuk ki az (1.5.4) összefüggés felírásakor is. Mármost visszatérve az eredeti feladatunkhoz, az (1.5.3) mozgásegyenletbe beírható a (1.5.4) összefüggés. Így adódik, hogy

$$\mathbf{L}_{O,FTR} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_{O,FTR} = \mathbf{N}_O.$$

FTR-ben az \mathbf{N}_O nyomatékvektor (N_{O1}, N_{O2}, N_{O3}) komponens alakba írható. Az $\mathbf{L}_{O,FTR} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$ összefüggésben a tehetetlenségi tenzort csak a test geometriája határozza meg, ezért nyilvánvalóan nem függ az időtől. Azaz írható, hogy

$$\mathbf{L}_{O,FTR} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

A mozgásegyenletre azt kaptuk tehát, hogy

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_O.$$

Komponensenként írva:

$$\theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 \theta_3 - \omega_3 \omega_2 \theta_3 = N_{O1},$$

$$\theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 \theta_1 - \omega_1 \omega_3 \theta_1 = N_{O2},$$

$$\theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 \theta_2 - \omega_2 \omega_1 \theta_2 = N_{O3}.$$

Összevonások után adódik, hogy

$$\theta_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (\theta_2 - \theta_3) = N_{O1},$$

$$\theta_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (\theta_3 - \theta_1) = N_{O2},$$

$$\theta_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (\theta_1 - \theta_2) = N_{O3}.$$

Ezt az elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert a pörgettyűmozgás **Euler-egyenleteinek** hívjuk. Az egyenletrendszer nemlineáris, ezért a megoldása néhány, jellegzetes, speciális esettől eltekintve egyáltalán nem egyszerű. Látható, hogy az egyenletrendszer kapcsolatot teremt a rögzített O pont körül forgó test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége és a rá ható külső erőknek az O pontra vett \mathbf{N}_O nyomatéka között. Az érdekessége az, hogy ezt a kapcsolatot a forgó testhez rögzített FTR-ben felírható $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ és N_{O1}, N_{O2}, N_{O3} komponensek között adja meg.

A pörgettyűmozgás megoldásának a másik nehézsége abban van, hogy ha már meghatároztuk $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ komponenseket, akkor még ebből ki kell találnunk, hogy a test hogyan mozog az álló rendszerben. Itt lép a színre az Euler-szögek rendszere. A bevezetőben láttuk ugyanis, hogy egy merev test mozgását a $\vartheta(t), \varphi(t), \psi(t)$ időfüggvényekkel adjuk meg. Ez azt jelenti tehát, hogy az $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ismeretében meg kell határozni az álló rendszerben rögzített xyz koordinátarendszerünkben a szögsebesség-komponenseket, majd ennek alapján magát a mozgást, azaz

$$\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t) \rightarrow \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t) \rightarrow \vartheta(t), \varphi(t), \psi(t).$$

Mindez általános esetben egyáltalán nem könnyű feladat, de elvileg megoldható. Ebben rejlik a pörgettyűk dinamikájának a „titokzatossága”, de egyben a szépsége is.

1.6. Általános mérlegegyenletek

A természettudományos vizsgálódásunknak (most elsősorban gondoljunk a fizikára) az az objektív alapja, hogy az univerzumunkban „valamiféle” rend van. És ezt a rendet az ember (jelesül most a fizikus) képes felismerni. „Mintázatokat” vélünk tapasztalni a jelenségek minden szintjén. Ez teszi lehetővé azt, hogy matematikai modelleket gyártsunk, amelyek „adekvátak” (hűek) és így belőlük számokkal megfogalmazható eredményeket kaphassunk. Ezeket aztán lehet a megfigyelésekkel, vagy tudatos mérésekkel ellenőrizni. Ha a modellünk „jó”, akkor számszerű egyezést fogunk tapasztalni. Azt mondjuk erre, hogy a modellünknek „reálisnak” kell lennie. Nem célunk most a modellalkotás filozófiai problémáiról beszélni. A kvantummechanikai tanulmányainknál ez úgyszólván elkerülhetetlen (lesz).

Ha egy törvény olyan, hogy nagyon sokféle természeti jelenségre értelmezhető, akkor az valami nagyon alapvető „mintázatot”, „univerzális igazságot” fogalmaz meg. A fizikus szeret ilyeneket találni, mert ez a „dolgok lényegi megértését” jelenti számára.

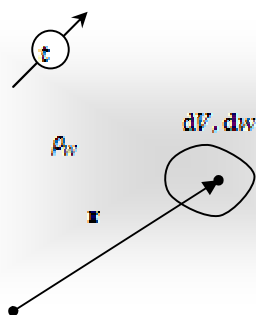
Ilyen univerzális törvényeket fogalmazzunk meg az ún. **mérlegegyenletekben**. Ezek extenzív „fizikai mennyiségek” nagyon általános (térbeli és időbeli) tulajdonságait fogalmazzák meg. Érvényes lehet „anyagi dolgokra” („szubsztancia”) pl. egy városba tartózkodó emberek száma. Vagy pedig „nem anyagi természetű” dolgokra, valamiféle számmal jellemezhető tulajdonságra („attributum”) mint pl. az energia. Mint látni fogjuk, a példaként felhozott két fogalom nagyon távoli egymástól, mégis ugyanolyan mérlegegyenleteknek tesznek eleget.

A fizikai jelenségeket mindig a tér egy általunk jól elkülönített részében figyeljük meg. Ezt a térrészt egy zárt felülettel elválasztjuk a környezetétől. A felület által határolt térrészben lévő objektumok alkotják a „fizika rendszert” amelyet valamilyen „extenzív” vagy „intenzív” (reális) fizikai mennyiségekkel jellemezünk (lásd Termodinamika). Egy fizikai jellemző „extenzívítása” nagyon általános tulajdonságokat eredményez. A „mérlegegyenletekben” éppen ezeket fogalmazzuk meg.

Legyen $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ valamely w skalár (extenzív) fizikai mennyiség **térfogatsűrűsége**. Ez azt jelenti, hogy a tér egy \mathbf{r} pontjában egy t időpillanatban egy dV térfogatelemben ebből a fizikai mennyiségből $dw = \rho_w dV$ van jelen. A $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ mértékegysége tehát:

$$[\rho_w] = \frac{[w]}{m^3}$$

Ez már „intenzív” mennyiség.



1.6.1. ábra

Hasznos fogalom ezen w mennyiség j_w **áramsűrűsége (-vektora)** is. Ennek definíciója

$$j_w \cdot d\mathbf{A} = \frac{dw}{dt}$$

azaz a szóban forgó fizikai mennyiségből a $d\mathbf{A}$ (irányított) felületelemben időegység alatt ennyi áramlik át. Az áramsűrűség mértékegysége tehát

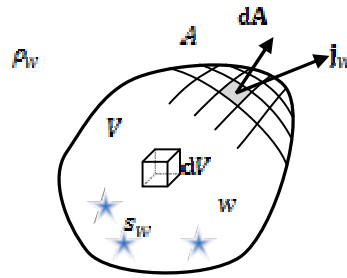
$$[j_w] = \frac{[w]}{s \cdot m^2}$$

Bevezethető még a w mennyiség s_w **forrásúrsűrűsége** is. Ez megadja, hogy ebből a w -ből egy elemi dV térfogatban mennyi keletkezik, vagy tűnik el:

$$s_w \cdot dV = \frac{dw}{dt}$$

A forrásúrsűrűség mértékegysége így:

$$[s_w] = \frac{[w]}{s \cdot m^3}$$



1.6.2. ábra

A fizikai rendszerünkben **a w extenzív mennyiség csak kétféle módon változhat: vagy átlép a felületen, vagy belül keletkezik.** A most bevezetett fogalmakkal ez a következő módon fogalmazható meg:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho_w \cdot dV = -I_{A(t)} + \int_{V(t)} s_w \cdot dV$$

Ez egy igen általános forma, hiszen a kiszemelt $V(t)$ térfogat és az őt határoló $A(t)$ felülete is változhat az időben. Ekkor $I_{A(t)}$ a mozgó felületen (időegység alatt) átlépő („w”) fizikai mennyiséget jelenti. Ez az áram az „áramsűrűség” fogalmával is felírható, azaz:

$$I_{A(t)} = \int_{A(t)} \vec{j}_w(A(t)) \cdot d\vec{A}.$$

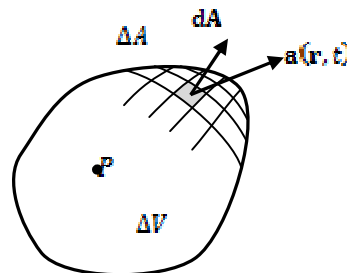
Itt $\vec{j}_w(A(t))$ (definíció szerűen) a mozgó felület pontjaiban definiálható áramsűrűség vektort jelenti. Így írható, hogy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \cdot dV = - \oint_A \vec{j}_w \cdot d\vec{A} + \int_V s_w \cdot dV:$$

A legtöbb fontos esetben azonban ilyen általános szemlélet egyáltalán nem szükséges. Nyugodtan tekinthetjük a határoló felületünket rögzítettnek. Ekkor a mérleg egyenletünk így írható:

$$\int_V \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV = - \oint_A \vec{j}_w \cdot d\vec{A} + \int_V s_w \cdot dV. \quad (1.6.1)$$

Ez az összefüggés valóban egy alapvető törvényszerűséget tükröz, hiszen számításba vettünk minden olyan lehetőséget, amely (tapasztalatunk szerint) megváltoztatja egy adott térfogaton belül az illető w (extenzív) fizikai mennyiség összértékét. Kellő általánosságra akkor jutunk, ha (a tapasztalat alapján) feltesszük, hogy mindez tetszőleges nagyságú, alakú (és elegendően sima felületű) térfogatra igaz. Azaz érvényes infinitezimális dV -re, amelyet infinitezimális zárt dA határol. Azaz mintegy „rázsugorodhatunk” a tér bármely helyvektorú P pontjára és ott a $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ lokális viselkedést tudjuk megadni. Ekkor a mérlegegyenlet ún. **differenciális alakjához** jutunk. Mielőtt ezt megfogalmaznánk egy új matematikai fogalom bevezetésére lesz szükségünk, amelynek a neve **divergencia**.



1.6.3. ábra

Tekintsünk egy $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvényt. Vegyük a térnek egy P pontja körüli ΔV térfogatát, amelyet a ΔA nagyságú zárt felület határol. Képezzük a következő skalár határértéket:

$$\lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ P \in \Delta V}} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta A} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a}.$$

Ha ez létezik, akkor ezt nevezzük az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ divergenciájának. Ekkor írható, hogy

$$\lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta A \rightarrow 0}} \oint_{\Delta A} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{a} \cdot \Delta V.$$

Ebből következik, hogy véges A felületű és véges V térfogatú térrészre integrálva:

$$\oint_A \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV.$$

Mint azt a matematikából tudjuk, $\nabla \cdot \mathbf{a}$ differenciálással megkapható. Ennek így is kell lennie, hiszen a bevezetett határértékkel az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ -nek egy olyan tulajdonságához jutottunk, amely a tér egy \mathbf{r} pontjában érvényes. Ez a következő:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_i \partial_i a_i = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Ezek után visszatérhetünk az integrális alakú (1.6.1) mérlegegyenletünkre. Az iméntiek értelmében a jobb oldal első tagja térfogatú integrállá írható át:

$$\int_V \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}_w) dV + \int_V s_w \cdot dV.$$

Átrendezés után:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w - s_w \right) dV = 0.$$

Ez csak akkor lehet bárhol és bármekkora V térfogat esetén igaz, ha az integrandus azonosan zérus. Azaz:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w - s_w \quad \text{vagy} \quad \partial_t \rho_w + \partial_i j_{wi} = s_w.$$

ahol $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ és $s = s(\mathbf{r}, t)$. Ez egy differenciális mérlegegyenlet, amit szokás még **kontinuitási egyenletnek** is nevezni. Ha forrás nincsen ($s_w = 0$), akkor **megmaradási tételről** beszélünk. Az elkövetkezőkben minden dinamikai egyenletet ilyen alakra próbálunk hozni. Természetesen kiindulunk mindig az alapegyenletekből kell (Newton, Maxwell, stb...).

Az eddigiekben nem beszéltünk arról, hogy milyen konkrét extenzív mennyiségre kell gondolnunk, amikor a fizikában mérlegegyenletekről beszélünk. A későbbi szemlélet (elektrodinamika, kvantummechanika) kialakítása végett célszerű a történeti utat követni. Ez ugyanis szépen tükrözi az általánosításoknak a szükségszerűségét.

Kiindulásul egy konkrét fizikai rendszerrel, a tömegpontrendszerrel foglalkozunk. Méghozzá olyannal, ahol $N \approx 10^{23}$ és a rendszer (makroszkopikus) térfogata akkora, hogy kontinuum eloszlású anyagmodellt lehet használni. Ezt nevezzük **folytonos anyageloszlású testnek**, vagy egyetlen szóval **közegnek**. Az ilyen rendszer dinamikájával a **kontinuummechanika** foglalkozik.

A kontinuummechanikában a következő extenzív (skalár) mechanikai mennyiségekre célszerű mérlegegyenleteket felírni.

- | | | |
|--------------|-----------------------------|---|
| 1. Tömeg. | A tömegsűrűség : | $\rho_m(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t).$ |
| 2. Energia. | Az energiásűrűség : | $\rho_E(\mathbf{r}, t) \equiv (1/2)\rho(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t).$ |
| 3. Impulzus. | Az impulzussűrűség : | $\rho_{p_i}(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t) \cdot v_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, 2, 3.$ |

Tömeg esetén általában nem írjuk ki az i indexet. Az impulzuszórány mérlegegyenletével nem foglalkozunk, ugyanis nem mond lényegesen többet, mint az impulzuszórány. Majd alkalomadtán megemlítjük az idevonatkozó fizikai tudnivalókat. Az impulzuszórány-sűrűség definíciója:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \rho(\mathbf{r}, t)]_i, \quad i = :$$

Látható, hogy ezekben a fontos esetekben a $\rho(\mathbf{r}, t)$ anyagsűrűség (azaz az maguk az anyagi pontok) hordozzák az extenzív mennyiséget (impulzus, energia, perdület). Az egyszerűbb szóhasználat végett úgy beszélünk ezekről a fizikai mennyiségekről, mintha maguk is „szubsztanciák” (valamiféle „megfogható dolgok”, „önálló anyagi létezők”) volnának. Holott ezek a közeget alkotó tömegpontok (átlagos) dinamikai tulajdonságai („attribútumok”). Mindegyik esetben mérlegegyenleteket tudunk használni. Ez az absztrakció teszi lehetővé majd azt, hogy a kontinuummechanikában kidolgozott sikeres szemléletet átvigyük a fizika más területeire is (elektrodinamika, kvantummechanika).

A következőkben az áramsűrűséget vizsgáljuk. Legegyszerűbb példaként tekintsük a tömegmérleget. Ez igen szemléletes, hiszen mindennapi tapasztalatunkra támaszkodhatunk. A tömeg-áramsűrűségnek két fajtáját ismerjük, ezek a **konvektív áramsűrűség**: $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, valamint a **konduktív áramsűrűség**: (például) $\mathbf{j} = -D \cdot \nabla \rho$. Jelen esetben ez a diffúzió.

A konvektív áramsűrűséget a tömegpontok makroszkopikus (rendezett) elmozdulása (azok áramlása) hozza létre. Ezért szerepel benne a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ áramlási sebesség. A konduktív (vezetési) áramsűrűséghez nem csatolódik makroszkopikus (rendezett) elmozdulás. A példaként felírt diffúziós áramot a részecskék rendezetlen, véletlenszerű mozgása idézi elő. És ezt a makroszkopikus skálán a tömegsűrűség inhomogenitásával tudjuk figyelembe venni (Fick-féle egyenlet). A jelenség természetéből fakad tehát, hogy ennek részletes mikrofizikai hátterével a **statisztikus fizika** foglalkozik.

Általában nem mindig tudunk kiindulásul ilyen „konduktív” áramokat felírni. Ezek legtöbbször az alap- (dinamikai) egyenleteknek a kontinuitási egyenletbe való átírásakor „kijönnek”. Röviden azt mondhatjuk, hogy minden olyan áramsűrűség, amelyik nem konvektív, azaz nem írható $\mathbf{j}_w = \rho_w \cdot \mathbf{v}$ alakba, az szükségképpen konduktív lesz még akkor is, ha a szemléletünk ezt „nem látja”.

A kontinuitási egyenlet tehát konvektív áramsűrűség esetén a következő:

$$\partial_t \rho_w + \partial_i (\rho_w v_i) = s_w \quad \text{(FIGYELEM itt „i”-re összegezni kell!!!)} \quad (1.6.2)$$

A mérlegegyenleteket sokszor az alapegyenletekből vezetjük le. Ennek során derül majd ki, hogy egy áramsűrűség milyen fajta. Erre már a kontinuummechanikában is látunk majd példát, de jelentősége azokban az esetekben lesz, amikor a háttérben nem egy „klasszikus tömegpontrendszer” húzódik meg. Ilyen lesz majd az elektrodinamikában a **Poynting vektor** és a kvantummechanikában a **valószínűségi áramsűrűség**.

A konduktív áramsűrűség fogalmának az ún. **nemegyensúlyi termodinamikában** van nagy szerepe. Mint azt tanultuk már, a termodinamika a „termodinamikai” állapotok közötti kapcsolatokat vizsgálja. Az idő fogalma nem szerepel a termodinamika szótárában, így valójában „termosztatikáról” beszélhetünk. A termodinamikai állapot felé haladó rendszer időbeli viselkedésével a **nemegyensúlyi termodinamika** foglalkozik. Ezekben a folyamatokban lépnek színre az „áramok”. A valódi dinamikai hátteret a **(nemegyensúlyi) statisztikus fizika** szolgáltat(ná)ja. De a makroszkopikus skálán a **Fick-féle egyenletek** a fenomenológia szintjén már jól használhatók. Az itt definiálható konduktív áramok mintegy intuitíve kerülnek be az elméletbe. A nemegyensúlyi termodinamika egy igen fontos tapasztalati ténye az, hogy egy adott konduktív áramsűrűséget többfajta inhomogenitás is előidézhethet. Azaz írható, hogy

$$\mathbf{j}_i = \sum_j L_{ij} \cdot \nabla \phi_j, \quad L_{ij} = L_{ji}, \quad j = 1$$

Ennek a szimmetriának (keresztteffektusok) a felismerése ONSAGER nevéhez fűződik. Elméleti jelentőségét a tudományos világ az 1968. évi kémiai Nobel-díjjal ismerte el indoklásul „a hőtani folyamatok időbeli lefutását jellemző törvényszerűség felfedezéséért”.

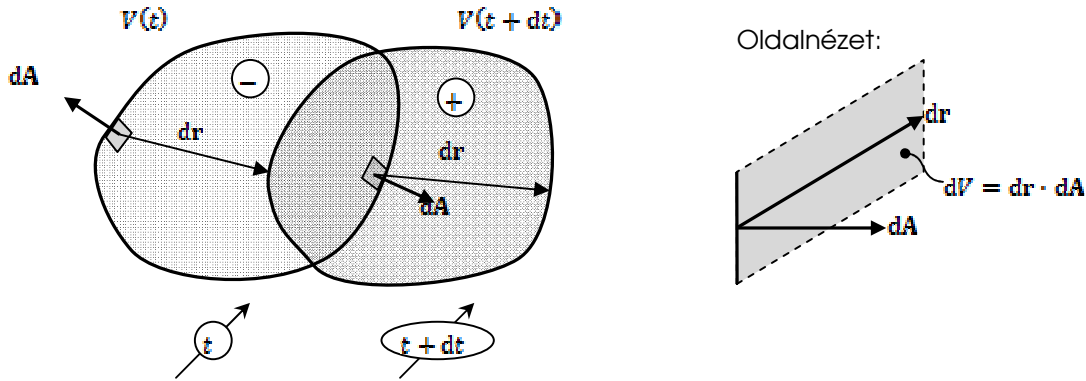
A kontinuitási egyenlethez másképpen is eljuthatunk. A későbbiekben ez a módszer (fizikai okokból) kikerülhetetlen lesz, ezért kell most ezzel foglalkoznunk. Válasszuk ki a közegnek egy V nagyságú, véges tartományát amelyet egy elegendően sima A felület határol. Gondolatban jelöljük meg a térfogatban lévő tömegpontokat és vizsgáljuk meg ezeknek a viselkedését. Ahogy telik az idő, mozog a közeg és mozognak a „megjelölt” pontok, azaz természetesen változni fog a kijelölt $V(t)$ térfogat és az őt határoló $A(t)$ felület is. A (mozgó) felületen belüli w extenzív mennyiség összege

$$w(t) = \int_{V(t)} \rho_w dV.$$

Ez csak úgy változhat az időben, ha a kijelölt (a közeggel együttmozgó) $V(t)$ térfogaton belül források vannak, azaz a felírható (integrális) mérlegegyenlet a következő lesz:

$$\frac{d}{dt}w = \int_{V(t)} s_w dV. \tag{1.6.3}$$

Ez tehát a w mennyiségre felírt integrális mérlegegyenlet, de egy olyan megfigyelő szerint, aki a közeggel együtt mozog. Emiatt a szemlélet miatt ezt **szubsztanciális egyenletnek** nevezzük. Meg fogjuk mutatni, hogy ebből a szubsztanciális mérlegegyenletből (szükségképpen) az előbb kapott (1.6.2) differenciális alakhoz jutunk. Hiszen a mérlegegyenlet fizikai tartalma független magától a megfigyelőtől.



1.6.4. ábra

Végezzük el a kijelölt teljes időderiválást (???) . A w mennyiség két okból változik. Egyrészt azért, mert a közeg $\rho(r, t)$ időfüggő térfogatsűrűséggel rendelkezik. Másrészt azért, mert a kijelölt $V(t)$ térfogat a közeggel együtt mozog a laborhoz képest. A labor rendszerben tehát

$$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{dt} \int_V \rho_w dV = \int_V \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV + \frac{1}{dt} \left(\int_{V(t+dt)} \rho_w dV - \int_{V(t)} \rho_w dV \right).$$

mozgó
állandó

A második tag így írható:

$$\int_{V(t+dt)} \rho_w dV - \int_{V(t)} \rho_w dV = \int_{V(t+dt)-V(t)} \rho_w dV = \oint_A \rho_w dr \cdot dA.$$

és ezért

$$\frac{1}{dt} \left(\int_{V(t+dt)} \rho_w dV - \int_{V(t)} \rho_w dV \right) = \oint_A \rho_w \frac{dr}{dt} \cdot dA = \oint_A \rho_w \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) dV.$$

Az utolsó lépésnél a megszokott matematikai átalakítást használtuk. Azt kaptuk tehát, hogy:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \int_V \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) dV. \tag{1.6.4}$$

Ezt beírva az (1.6.3) szubsztanciális mérlegegyenletbe, adódik, hogy

$$\int_V \frac{\partial \rho_w}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) dV = \int_V s_w dV.$$

Differenciális alakban:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) + s_w.$$

Illetve „nablátlan” változatban

$$\partial_t \rho_w + \partial_i (\rho_w v_i) = s_w \quad \text{(FIGYELEM itt „i”-re összegezni kell!!!)}$$

Ez pedig éppen (1.6.2), ahogyan azt vártuk is!

1.7. Deformálható testek mechanikájának az alapjai

1.7.1. Deformálható testek mozgásának a leírása

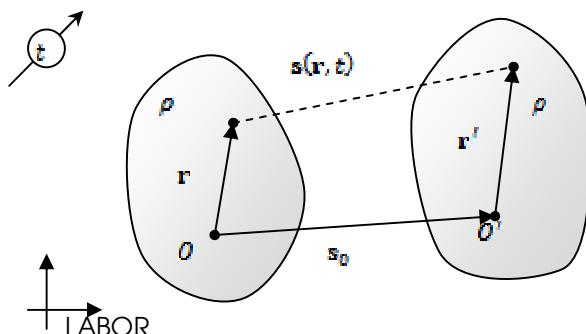
A kontinuum (anyag)modellt az előzőekben már sikeresen használtuk egy speciális pontrendszer, a merev testek dinamikájának a tárgyalásakor. Most elhagyjuk azt a megkötést, amely a merev testeket „merevvé” tette, azaz megengedjük, hogy a test pontjai közötti távolság megváltozzon. Ez a változás azonban nem tetszőleges, hanem a testre ható külső és belső erők határozzák meg. A pontrendszer szemléletben megjelenő belső erők tulajdonsága a makroszkopikus skálán az illető anyagra jellemző anyagi tulajdonságként jelenik meg. A deformálható testeknek (közegeknek) ezek a makroszkopikus jellemzői definiálják azt, hogy gáz, folyadék vagy rugalmas közeg dinamikáját kell meghatároznunk.

Először a deformálható testek mozgásának a leírásával kell foglalkoznunk és csak ennek ismeretében térhetünk át a dinamikára.

A már ismert technikát követve vegyünk fel egy álló vonatkoztatási rendszert („labor rendszert”). A deformálható testünk mozgását ebben a labor rendszerben fogjuk vizsgálni. A test egy pontját a labor rendszerben elfoglalt helye alapján azonosítjuk. Ha a deformálható test (a „közeg”) mozgásban van, akkor minden pontjának a helye az időben változni fog. Ez a fajta szemlélet túl általános és ugyanúgy nem vezet eredményre, mint azt a pontrendszerek esetében láttuk.

Szűkítsük le a vizsgálatunkat csak a „deformálhatóságra”. Mint azt láttuk, ez azt jelenti, hogy (ellentétben a merev testekkel) most a közeg pontjai közötti távolság már nem marad állandó. Sőt, ennek a változásnak a meghatározása jelenti az „új” feladatot.

A probléma jellegéből fakadóan célszerű a közeg pontjainak a helyzetét a közeg egy kiválasztott pontjához viszonyítva megadni. Legyen ez az O pont (természetesen ez is mozog). A közeg pontjait az O -ból mért \mathbf{r} helyvektorral azonosítjuk. Egy pont mozgását az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ függvény írja le. Ez lesz a keresett mennyiségünk.



1.7.1. ábra

Vegyünk észre egy fontos újdonságot a tömegpontrendszereknél használt jelölésekhez képest! A pontrendszerben a rendszer dinamikáját az

$$\mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

N elemű függvényhalmaz ismerete jelentette. A deformálható közegeknél ugyanezt a szerepet az

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \text{test pontjai}$$

kontinuum számosságú függvényhalmaz veszi át. Az \mathbf{r} tehát az i (részecske azonosító) index helyére lép. Az ismeretlen függvény tehát az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$. Célszerű, ha az \mathbf{r} és az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ vektorokat a labor rendszerben definiált Descartes-koordinátákkal adjuk meg.

Megkönnyíti a majdani matematikai formulák kezelését, ha a jelöléseinket kissé megváltoztatjuk. A labor Descartes koordinátáknál a megszokott $\{x, y, z\}$ helyett az $\{1, 2, 3\}$ megnevezést használjuk. Ennek megfelelően

kiindulásul a 1.7.1. táblázatban összefoglalt jelöléseket használjuk. A további fizikai fogalmak jelölését is ennek alapján fogjuk bevezetni.

A fogalom megnevezése	Jele	Descartes-komponensek
Labor koordináták		$\{1,2,3\}$
Közeg pontja	\mathbf{r}	(x_1, x_2, x_3)
Pont elmozdulása	\mathbf{s} $\mathbf{s}(\mathbf{r})$	(s_1, s_2, s_3) $s_i(x_1, x_2, x_3) \equiv s_i(x_j), \quad i, j = 1, 2, 3$
Koordináták szerinti (parciális) deriválás		$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i, \quad i = 1, 2, 3$

1.7.1. táblázat

Legyen az $\mathbf{0}$ referenciapont elmozdulása $\mathbf{s}_0 = (s_{01}, s_{02}, s_{03})$. A közeg egy \mathbf{r} (helyű) pontjának az elmozdulása $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Minket azonban a közeg pontjainak egymáshoz képesti relatív elmozdulása érdekel azaz $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{ds}$, ami skalár komponensekkel írva

$$s_i = s_{0i} + ds_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.1)$$

(MEGJEGYZÉS: Itt most „ds” **NEM INFINITEZIMÁLIS** jelöl, hanem egy **véges** távolságot) Ha a közegünk nem deformálódik (azaz merev marad), akkor a translációs mozgás esetén minden pontja ugyanúgy mozog mint az $\mathbf{0}$ pont, azaz $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_0$, tehát $\mathbf{ds} = \mathbf{0}$.

A deformálható közeg a mozgása során a deformáción kívül még el is fordulhat. Azaz $\mathbf{ds} \neq \mathbf{0}$ mindkét mozgásformát tartalmazza. A következőkben a forgást és a deformációt szét kell választanunk egymástól.

A $\mathbf{ds} \neq \mathbf{0}$ relatív elmozdulások ds_i skalár komponensei a többváltozós függvényeknél tanultak szerint így határozható meg. Mivel

$$s_i = s_i(x_j), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ezért ennek a megváltozása

$$ds_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial s_i}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial s_i}{\partial x_3} x_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

azaz

$$ds_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_i}{\partial x_j} x_j \equiv \sum_{j=1}^3 \partial_j s_i \cdot x_j. \quad (1.7.2)$$

A továbbiakban bevezetünk egy szummázási konvenciót. Ez azt jelenti, hogy a szumma jelet nem írjuk ki, de ha egy kifejezésben két index azonos, akkor arra szummázni kell. Ennek megfelelően az (1.7.2) kifejezés röviden így írható:

$$ds_i = \partial_j s_i \cdot x_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Az elkövetkezőkben az $i = 1, 2, 3$ -at sem írjuk ki. Könnyű észrevenni, hogy bevezethető a $\nabla s_i = \text{grad } s_i$ jelölés is ebben a formulában, azaz

$$ds_i = \partial_j s_i \cdot x_j \equiv (\nabla s_i) \cdot \mathbf{r}.$$

Szoktuk használni a koordinátarendszer-független vektori jelölést is a következő alakban:

$$\mathbf{ds} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{r}.$$

Ez egy formális felírás, hiszen vektorral nem lehet osztani. Mivel itt a \mathbf{ds} és az \mathbf{r} vektorok között lineáris kapcsolat van, ezért a $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{r}}$ neve **derivált tenzor**. Ezt szokásos még a nablával vett diadikus szorzatként kezelni, azaz a derivált tenzort $\nabla \otimes \mathbf{s}$ alakban felírni. Ha lehet, mi kerülni fogjuk a „nablásított” formulákat és ahol csak lehet, a skalár komponenses felírást használjuk.

A most bevezetett szabályt **Einstein-féle szummázási konvenciónak** nevezik. Ennek oka az, hogy az EINSTEIN által kidolgozott általános relativitáselméletben használt differenciálgeometriai műveletek sok indexet és sok szummát tartalmaznak. A formulák jobban áttekinthetőek ezzel a jelöléssel.

A továbbiakban nem fogjuk ilyen részletességgel rávezetni magunkat erre a könnyített jelölésre, hanem a formuláinkat már rögtön ebben a formában írjuk fel.

A derivált tenzor Descartes-koordinátarendszerben egy 3×3 -as mátrix lesz, amelynek mátrixelemei $\partial_j s_i \equiv s_{ij}$. Evvel kapjuk, hogy $ds_i = s_{ij} x_j$. Mint minden tenzor, így az s_{ij} is felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegeként, azaz

$$s_{ij} \equiv \epsilon_{ij} + a_{ij},$$

ahol $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ és $a_{ij} = -a_{ji}$. Mindkét rész előállítható az s_{ij} ismeretében a következő triviális módon:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ij} + s_{ji}) = \frac{1}{2} (\partial_j s_i + \partial_i s_j),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ij} - s_{ji}) = \frac{1}{2} (\partial_j s_i - \partial_i s_j).$$

Ezeket beírva az (1.7.1) egyenletbe az $s_i(x_j)$ elmozdulás-függvényre kapjuk, hogy

$$s_i = s_{i0} + a_{ij} x_j + \epsilon_{ij} x_j.$$

Itt mindhárom együttthatónak szemléletes fizikai jelentése van, nevezetesen

- s_{i0} a transláció, mértékegysége **m**,
- a_{ij} a forgás, mértékegysége **1**,
- ϵ_{ij} a, deformáció mértékegysége **1**.

Most e két utóbbi bizonyítása következik. Tudjuk, hogy a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektori szorzat Descartes-komponensekkel a következő:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Szokásos bevezetni egy új matematikai szimbólumot. Ez azt a célt szolgálja, hogy két vektor közötti „vektori szorzást” Descartes-komponensekkel tömör formába írassuk (használva a szummázási konvenciót). A fenti kifejtés röviden így is írható:

$$\mathbf{c}_i = \epsilon_{ijk}$$

A most bevezetett ϵ_{ijk} egy harmadrendű, (teljesen) antiszimmetrikus tenzor, a következő definíciókkal:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{ha bármelyik két index megegyezik} \\ +1 & \text{ha } ijk = 123, 231, 312, \\ -1 & \text{ha } ijk = 321, 132, 213. \end{cases}$$

Ez könnyen megjegyezhető, ha felismerjük, hogy ϵ_{ijk} -hez tartozó permutációk az ϵ_{ijk} ciklikus cseréi, míg ϵ_{ijk} esetén ezen permutációk „visszafelé” írva szerepelnek.

Tudjuk, hogy az a_{ij} antiszimmetrikus tenzor mátrixa a következő:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Legyenek most a mátrix elemei a következők:

$$a_{23} = -d\varphi_1, \quad a_{13} = +d\varphi_2, \quad a_{12} = -d\varphi_3.$$

Szorozzuk meg az így definiált a_{ij} mátrixot az \mathbf{r} oszlopmátrixával. Ekkor kapjuk, hogy:

$$a_{ij} x_j = \begin{bmatrix} 0 & -d\varphi_3 & +d\varphi_2 \\ +d\varphi_3 & 0 & -d\varphi_1 \\ -d\varphi_2 & +d\varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

azaz

$$a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} x_2 d\varphi_2 - x_3 d\varphi_3 \\ x_1 d\varphi_1 - x_3 d\varphi_1 \\ x_2 d\varphi_1 - x_1 d\varphi_2 \end{bmatrix} \equiv d\varphi \times \mathbf{r}.$$

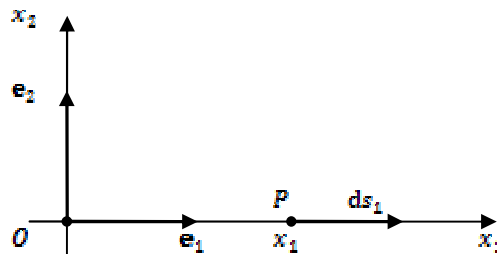
Mint azt már láttuk, ez egy forgatást jelent. (lásd (!!!) tömegpont dinamikája fejezet). Ebből következik tehát, hogy **a deformációt az $\epsilon_{ij}x_j$ kifejezés kell, hogy megadja**. Az ϵ_{ij} szimmetrikus tenzor neve ezért **deformációs tenzor**. Ki kell derítenünk, hogy a mátrixelemeinek mi a szemléletes fizikai tartalma.

Mostantól kezdve csak a deformációk érdekelnek bennünket. A közeg globális mozgását (transzláció és forgás) nem vizsgáljuk. Tekintsük tehát az \mathbf{r} helyen lévő részecske relatív elmozdulását, amelyet a $d\mathbf{s}_i = \epsilon_{ij}x_j$ kifejezés ad meg, ahol, mint azt láttuk,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i s_j + \partial_j s_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right).$$

Descartes-bázisban vagyunk, amelynek ortonormált bázisvektorait \mathbf{e}_1 -el, \mathbf{e}_2 -vel és \mathbf{e}_3 -mal jelöltük. A relatív elmozdulás részletesen kírva a következő:

$$\begin{bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$



1.7.2. ábra

Legyen az x_1 tengelyen egy P pont, amelynek helye

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{r}(x_1, 0, 0) \rightarrow P.$$

Ennek a P pontnak az O -hoz képesti relatív elmozdulása könnyen kiszámítható:

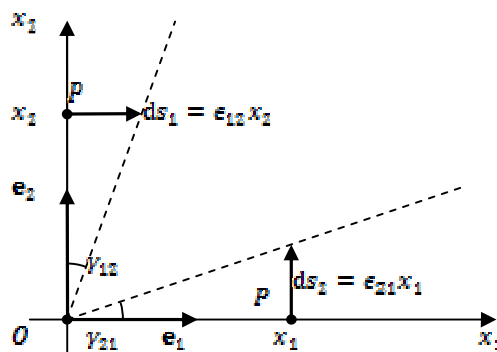
$$d\mathbf{s} \rightarrow ds_i = \epsilon_{ij}x_j \rightarrow ds_1 = \epsilon_{11}x_1.$$

Hasonló módon, ha a P pontot az x_2 vagy x_3 tengelyen vesszük fel akkor azt kapjuk, hogy

$$ds_2 = \epsilon_{22}x_2, \quad ds_3 = \epsilon_{33}x_3.$$

Ennek az eredménynek szemléletes tartalma van. Hiszen a ds_i mindhárom esetben az \overline{OP} egyenes szakasz megnyúlását adta meg. Innen látható, hogy **a deformációs mátrix főátlójában lévő elemeket „relatív megnyúlásként” értelmezhetjük**. Azaz

$$\epsilon_{ii} \equiv \text{relatív megnyúlás}, \quad \epsilon_{ii} = \frac{ds_i}{x_i}.$$



1.7.3. ábra

Határozzuk meg most az x_1 tengelyen lévő P pont x_2 irányú (relatív) elmozdulását. A deformáció tenzor szerint erre azt kapjuk, hogy

$$ds_2 = \epsilon_{21} x_1$$

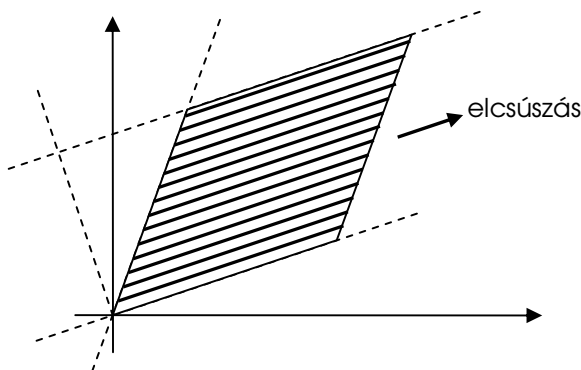
Az elmozdulás geometriájából pedig az ábra alapján adódik, hogy ez az \overline{OP} egyenes szakasz elfordulására jellemző, azaz:

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{ds_2}{x_2} = \epsilon_{12} \approx \gamma_{12}$$

A számolás ugyanígy elvégezhető értelemszerűen a többi vegyes indexű elemre is. Itt feltettük azt, hogy lokálisan mindig kis deformációkról beszélünk, azaz használható a $\operatorname{tg}(x) \approx x \ll 1$ közelítés. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\epsilon_{ij} \approx \gamma_{ij}, \quad i \neq j,$$

azaz **a deformációs tenzor vegyes indexű elemei a „szögdeformációt” adják**. Ezt szokták **csúszásnak** is nevezni. Ennek oka következő. Vegyünk egy olyan deformációt, amikor megnyúlás nincsen. Ekkor például az x_1, x_2 síkban lévő négyzetlap a deformáció során egy rombuszá torzul. Olyan, mintha egy kártyacsomagban a lapokat elcsúsztattuk volna. Amikor majd a deformációkat előidéző erőhatásokat vizsgáljuk, ki fog derülni, hogy ez a „kártyacsomagos” analógia nem is olyan légből kapott dolog.



1.7.4. ábra

Nézzük meg ezek után, hogy miként deformálódik egy kocka alakú tartomány. Egyszerűség végett legyen ez az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormált ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$) bázisvektorok által definiált egységnyi térfogatú kocka. Deformáció után a kocka élvektorai a következők lesznek:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \hat{\epsilon} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{1} + \hat{\epsilon}) \mathbf{e}_i.$$

A kocka eredeti térfogata

$$V_0 = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1.$$

A deformálódott „kocka” térfogata:

$$V'_0 = (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 = \det(\mathbf{1} + \hat{\epsilon}).$$

A jobb oldali kifejezés azt az elemi matematikai tényt fejezi ki, hogy a vegyes szorzat értéke a szorzatban szereplő vektorok Descartes-komponensekből alkotott mátrix determinánsa. Részletsen kiírva:

$$V'_0 = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & 1 + \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 1 + \epsilon_{33} \end{vmatrix}.$$

Kis deformációkról lévén szó, a determináns kifejtésekor minden olyan tagot elhanyagolhatunk, amelyben $\epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ szorzat szerepel. Azaz csak az elsőrendű deformációkat vesszük figyelembe. Ekkor kapjuk, hogy

$$V'_0 \approx 1 + \underbrace{(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})}_{\operatorname{div} \mathbf{u}} \rightarrow \frac{V'_0 - V_0}{V_0} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}.$$

Itt kihasználtuk azt a tényt, hogy $V_0 = 1$. Szemléletesen, a térfogat relatív megváltozását kaptuk. Ez pedig a deformációs mátrix főátlójában lévő elemeknek az összege. A matematikából tudjuk, hogy ez a forgatással szemben invariáns mennyiség. Ennek neve: **a mátrix nyoma** (vagy „spur” vagy „trace”). Azaz általában is igaz, hogy

$$\frac{dV}{V} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} = \partial_i s_i.$$

A jobboldalon felismerhetjük, hogy az $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ vektorfüggvény divergenciáját, azaz

$$\partial_i s_i = \nabla \cdot \mathbf{s} = \text{div } \mathbf{s}.$$

Szavakban: **az elmozdulás-vektor divergenciája a relatív térfogat változást adja**. Mindebből az is látható, hogy ha egy olyan deformációnk van, amelyben nincsen megnyúlás, akkor ott a térfogat állandó marad. A csak „csúsztatást” tartalmazó deformáció ilyen. A szemléltető kártyacsomag ezt is teljesíti.

Tudjuk, hogy minden szimmetrikus tenzor diagonális alakba transzformálható. Ez az ún. **főtengely rendszer**. Ebben a rendszerben az $\hat{\epsilon}$ deformáció-tenzor diagonális:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

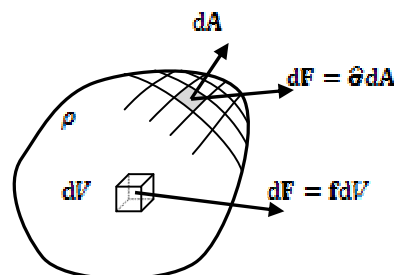
A főátlóban lévő összeg invariáns, és a térfogatváltozás az ismert módon számítható:

$$V'_0 = V_0 + dV, \quad dV \ll V_0.$$

Lineáris algebrai módszerekkel megmutatható, hogy az ϵ_{ij} által megadott deformáció során bármely („kis”) gömb alakú tartomány ellipszoiddá torzul! Főtengely-rendszerben az ellipszoid tengelyei éppen a főtengelyekkel esnek egybe.

1.7.2. Erőhatások folytonos anyageloszlású testekben

Az előzőekben tárgyalt deformációk a vizsgált közegben erőhatások következtében lépnek fel. Ezek lehetnek **térfogati erők** és **felületi erők**.



1.7.5. ábra

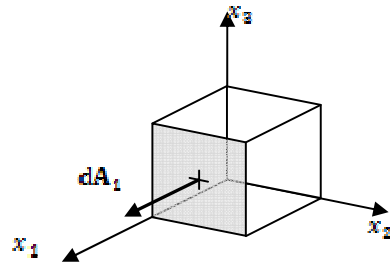
A deformációt okozó térfogati erő a közeg egy (infinitezimális) dV nagyságú térfogatú részére hat:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot dV.$$

Az erőhatás jellemzésére bevezetett \mathbf{f} mennyiség neve **térfogati erősűrűség**. A mértékegysége: $[f] = 1 \text{ N/m}^3$. A deformációt létrehozó felületi erő a közegben kijelölt infinitezimális dA felületen ható $d\mathbf{F}$ erő, azaz

$$d\mathbf{F} = \hat{\sigma} \cdot d\mathbf{A}.$$

A közegben fellépő és deformációt okozó erőhatásnak a jellemzésére bevezetett $\hat{\sigma}$ mennyiség neve **mechanikai feszültségtenzor**. A tenzor mátrixelemeinek mértékegysége: $[\sigma_{ij}] = 1 \text{ N/m}^2$, azaz **felületi erősűrűség**.



1.7.6. ábra

Részletesen kiírva tehát:

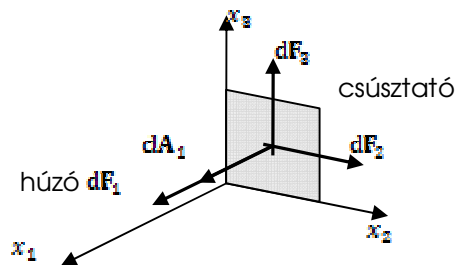
$$\begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix}.$$

Célszerű lesz az egyes mátrixelemek szemléletes fizikai jelentését is megadni. Példaként tekintsünk egy, az x_2, x_3 síkkal párhuzamos helyzetű (infinitézimális) $dA = dA_1 \mathbf{e}_1 = (dA_1, 0, 0)$ felületelemet. Az erre ható erő a mátrixszorzásnak megfelelően

$$d\mathbf{F} = (dF_1, dF_2, dF_3),$$

azaz részletesen az egyes erőkomponensek értéke:

$$dF_1 = \sigma_{11} dA_1, \quad dF_2 = \sigma_{21} dA_1, \quad dF_3 = \sigma_{31} dA_1.$$

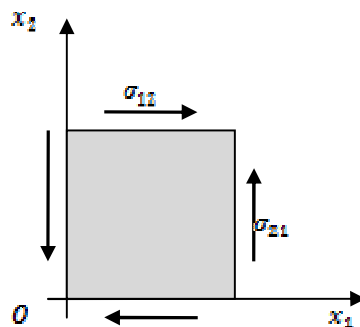


1.7.7. ábra

Látható tehát, hogy dF_1 a felületelemre merőlegesen hat. Ez egy **húzó erő**. A dF_2 és a dF_3 erők a felületelem síkjában hatnak, mintegy el akarván „csúsztatni” a felületet a saját síkjában. Ez tehát egy **nyíró erő**. A mátrixelemek elnevezése az erőhatásra jellemző, azaz σ_{ii} neve **húzó feszültség** és σ_{ij} ($i \neq j$) neve **nyíró feszültség**.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen nyíróerő hat egy infinitézimálisan kicsiny kocka alakú közeg darabra. Az erőhatás legyen olyan, hogy

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



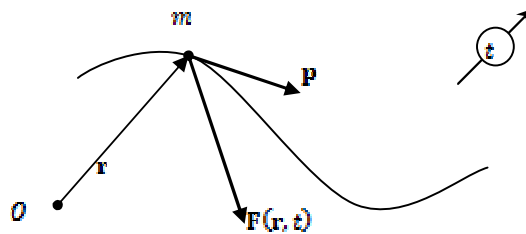
1.7.8. ábra

Látható, hogy $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ kell, hogy legyen. Ugyanis a vizsgált anyag belsejében (pontrendszer) csak belső erők hatnak. A rendszer belsejében kijelölt bármilyen infinitezimális térfogatnál kialakuló felületi erőhatások nagyon sok tömegpont együttes erőhatásának az eredménye. Mivel a pontrendszer mozgásáról már leválasztottuk a forgást és csak a deformációt tartottuk meg (ε_{ij}) ezért a szóban forgó infinitezimális kocka nem foroghat. Így a ráható felületi erők eredő forgatónyomatékának nullának kell lenni. Ez jelen esetben azt jeleneti, hogy a $\hat{\sigma}$ feszültségtenzor egy szimmetrikus tenzor, mert ha $\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$ lenne, akkor az \hat{O} -ra nézve egy eredő forgatónyomaték is fellépne.

1.7.3. A kontinuummechanika alapfogalmai

A kontinuummechanika célja a közegekre jellemző mozgásegyenletek felírása. Ezeket mérlegegyenletek formájában fogjuk megfogalmazni. Természetesen csak a Newton egyenletekből tudunk kiindulni, hiszen ez fogalmazza meg a mechanika alaptörvényeit, így a mozgásegyenletet is. Ez azonban tömegpontokra mond ki törvényeket. Kapcsolatot kell tehát teremteni a pontmechanika és a kontinuummechanika között. De most ezt „visszafelé” célszerű csinálni, azaz a kontinuum modell felől kell a pontmodellhez eljutnunk.

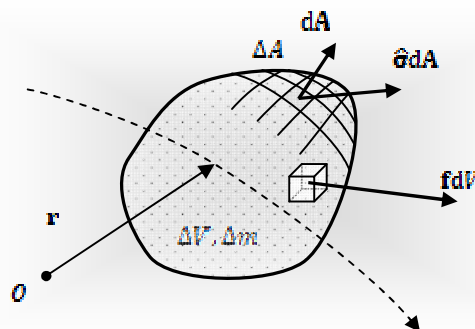
A megoldás kézenfekvő. A közegben a tömegpontok eloszlását a közeg tömegsűrűsége adja meg. Azaz a közeg bármely P pontjának a dV környezetében $dm = \rho(P) dV$ tömeg van.



1.7.9. ábra

Triviális ugyan, de most tudatosítanunk kell magunkban azt, hogy Newton 2. törvénye (a mozgásegyenlet) egy lokális egyenlet. Mint tudjuk, azt mondja meg, hogy az \mathbf{r} helyen lévő pontra az \mathbf{r} helyen fellépő $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erő hat. Azaz az erőhatás mintegy „követi” a tömegpontot. Ez azt jelenti, hogy ha Newton 2. törvényét kontinuum anyagra akarjuk alkalmazni a mozgásegyenlet megalkotásakor, akkor ezt a („tömegpont követő”) szemléletet kell alkalmaznunk. Ezt nevezzük **Lagrange-szemléletnek** (ejtsd: „lagranzs”).

Határoljuk el a kontinuum anyag egy ΔV térfogatát, amelynek a tömege Δm . Az (elegendően sima) határoló felület nagysága ΔA . Ha a térfogat a makroszkopikus méretekhez képest elég kicsiny, akkor már tömegpontnak tekinthető és alkalmazható rá a Newton 2. törvénye. Ehhez alkalmaznunk kell a megbeszélte Lagrange-szemléletet. Azaz gondolatban jelöljük meg a ΔV és a ΔA által definiált Δm -et alkotó tömegpontokat és kövessük ennek a térfogatelemnek a mozgását. A Δm mozgását a mindenkor rá ható erők fogják meghatározni. Ezek az erők nyilvánvalóan csak a ΔV térfogaton belül, vagy a ΔA felületen léphetnek fel. Az elsőt **térfogati erőnek**, a másodikat **felületi erőnek** nevezzük. A térfogati erők lehetnek **külső erők** (pl. a földi gravitáció) és lehet **belső erő** (pl. elektromosan töltött részecskék, azaz plazma esetén ható Coulomb-erő). A felületi erők legtöbbször belső erők, hiszen a ΔV -t a rendszer többi részétől a ΔA felület választja el.



1.7.10. ábra

Mint azt tudjuk, a tömegpontra felírt 2. Newton-törvény

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}.$$

Ha ugyanezt az egyenletet a kontinuum anyag egy Δm elemi tömegére alkalmazzuk, akkor meg kell határozni az elemi tömeg $\Delta \mathbf{p}$ impulzusát. Ez a tömegpontrendszerknél használt definíció szerint

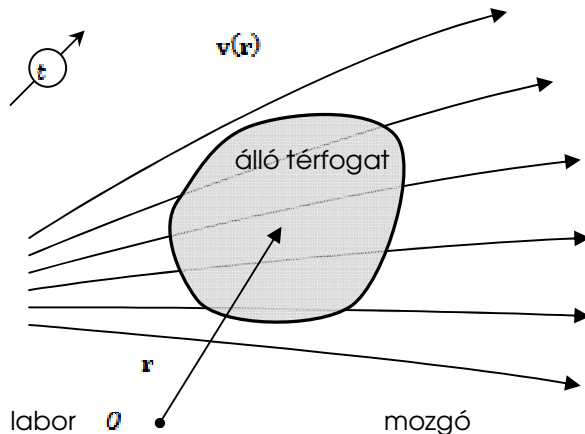
$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta V} (\rho \mathbf{v}) dV.$$

Ezzel a mozgásegyenlet a következő lesz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Delta V} \mathbf{f} dV + \oint_{\Delta A} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.7.3)$$

A mozgásegyenletet azonban nem ebben az alakban szoktuk használni. Itt ugyanis integrálás is és deriválás is szerepel. Jobban szeretünk csak deriválásokat tartalmazó parciális differenciálegyenleteket felírni. Zavaró lehet még az is, hogy integrálásakor a közeggel együtt kell mozogni és így annak „formális felírása” nehézkessé válik.

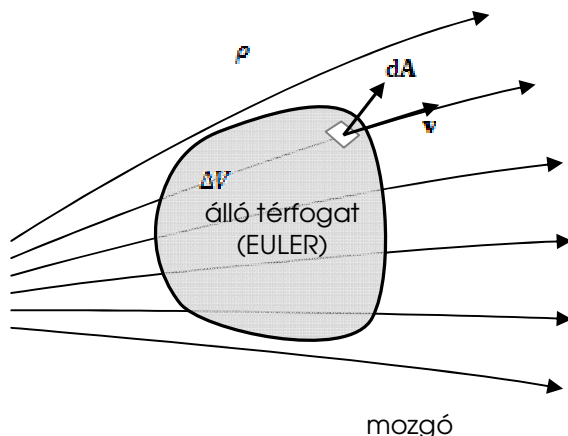
Ezért áttérünk egy másik, ún. **térelméleti szemléletre**. Ennek a neve **Euler-féle szemlélet**. Ez azt jelenti, hogy minden dinamikai mennyiséget az álló labor rendszerben definiált \mathbf{r} hely és t idő függvényeként tekintünk. Így pl. a $\rho(\mathbf{P})$ helyett $\rho(\mathbf{r}, t)$ -t fogunk használni. A különbség óriási. $\rho(\mathbf{P})$ a mozgó közegnek egy adott (mozgó) \mathbf{P} pontjában lévő tömegsűrűség. A $\rho(\mathbf{r}, t)$ a labor rendszer valamely álló \mathbf{r} helyén, t időpillanatban mérhető tömegsűrűség. Azaz $dm = \rho(\mathbf{P}) dV$ mindig ugyanazokból a tömegpontokból álló halmaz össztömegét jelenti. Ugyanakkor a $dm = \rho(\mathbf{r}, t) dV$ elemi tömeget a t időpillanatban, éppen az álló \mathbf{r} pont dV környezetében tartózkodó tömegpontok össztömege fogja megadni. Ezek pedig természetesen az idő múlásával mindig mások és mások lesznek. Mivel minden dinamikai mennyiség a hely és az idő függvénye, ezért nevezzük ezt **(klasszikus) térelméletnek**. A kontinuum rendszer dinamikájának az ismerete éppen azt jeleneti, hogy a labor rendszer minden \mathbf{r} pontjában, minden t időpillanatban meg tudjuk mondani a közegre jellemző dinamikai mennyiségek értékét (pl. tömegsűrűség, a közeg áramlási sebessége, stb...).



1.7.11. ábra

1.7.4. A tömegmegmaradás

Mielőtt rátérnénk a deformálható testek dinamikai tulajdonságainak a tárgyalására, igen hasznos lesz a tömegre vonatkozó mérlegegyenlet részletes vizsgálata.



1.7.12. ábra

Tekintsünk egy áramló közeget. Ez azt jelenti, hogy ismert a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ún. **sebességmező** (vagy **sebességtér**). Ez megadja egy tetszőleges t időpillanatban a tér bármelyik \mathbf{r} pontjában lévő részecske $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességét. A közeg tömegsűrűsége legyen $\rho(\mathbf{r}, t)$. Ekkor az ismert definíció szerint a konvektív tömegáram $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ lesz. Jelöljük ki a térben egy álló ΔV térfogatot. Ekkor a tömegre vonatkozó mérlegegyenlet

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV + \int_{\Delta V} \mathbf{s} \cdot d\mathbf{V}.$$

Az eddigi szerzett tapasztalataink alapján a tömeg megmaradó mennyiség (azaz nem keletkezik és nem tűnik el), azaz $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$, és ezért

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = 0.$$

Ez pedig (a már tárgyalt) differenciális alakban

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0.$$

Ez tehát a **tömegmegmaradás** törvénye az Euler-féle térelméleti szemlélettel megfogalmazott alakban. A második tagban mindkét tényező függ a helytől ($\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ és $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$). A szorzat deriválás szabályát alkalmazva adódik, hogy

$$\partial_i (\rho v_i) = \frac{(\partial_i \rho) \cdot v_i}{\nabla \rho \cdot \mathbf{v}} + \frac{\rho \cdot (\partial_i v_i)}{\rho (\nabla \cdot \mathbf{v})}.$$

Ezt beírva a kontinuitási egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\partial_t \rho + (\partial_i \rho) \cdot v_i + \rho \cdot (\partial_i v_i) = 0. \quad (1.7.4)$$

Az első két tag összegének szemléletes fizikai tartalma van. Tételizzük fel, hogy egy (pontoszerű) megfigyelő $\mathbf{r}_M(t)$ szerint mozog a labor terében. Ez a megfigyelő is fel tudja írni a tömegsűrűség időbeli megváltozását, amelyik most két részből fog állni. Egyrészt azért változik, mert explicite változik az időben, másrészt azért, mert a megfigyelő elmozdult az eredeti helyéről.

$$\left[\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) \right]_M = \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \right]_M + \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{dx_i}{dt} \right]_M,$$

azaz

$$\left[\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) \right]_M = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\mathbf{r}, t) \cdot \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_M,$$

„Nablásított” jelöléssel:

$$\left[\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) \right]_M = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \rho(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_M.$$

Mármost, ha a (pontoszerű) megfigyelő éppen a közeg sebességével mozog, akkor $\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. A közeggel („szubsztancia”) együtt mozgó megfigyelő által észlelt időbeli változást **szubsztanciális deriválnak** nevezzük és d_t -vel jelöljük. Így tehát

$$d_t \rho = \partial_t \rho + (\partial_i \rho) \cdot v_i. \quad (1.7.5)$$

„Nablásított” formába írva:

$$d_t \rho = \partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \mathbf{v}.$$

Természetesen az iménti gondolatmenet bármilyen skalár Ψ fizikai mennyiségre igaz. Így természetesen bármilyen extenzív Ψ -nek a sűrűségére is. Azaz $d_t \rho_\Psi = \partial_t \rho_\Psi + (\partial_i \rho_\Psi) \cdot v_i$.

Mindebből látszik, hogy az (1.7.4) összefüggés első két tagja éppen a $\rho(\mathbf{r}, t)$ szubsztanciális (idő)deriváltja. Így a tömegmegmaradás törvénye „szubsztanciális alakban” a következő lesz:

$$d_t \rho + \rho \cdot (\partial_i v_i) = 0.$$

Ha a közeg összenyomhatatlan, akkor nyilvánvalóan a közeggel együtt mozgó („szubsztanciális”) megfigyelő állandó tömegsűrűséget tapasztal ($\rho \equiv \rho_0$). A tömegsűrűség állandósága egyben a közeg összenyomhatatlanságát jelenti.

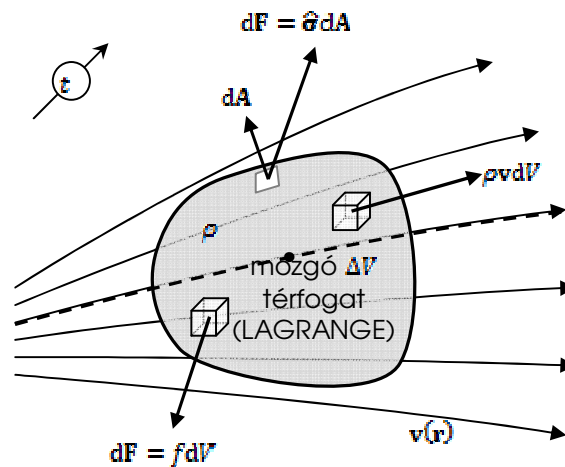
$$d_t \rho_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_i v_i = 0.$$

Szavakban: **összenyomhatatlan közegek áramlásakor a sebességtérnek nincsen forrása, így összenyomhatatlan közegekben a sebességmező divergenciája zérus:**

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ezek után rátérhetünk a folytonos közegek mozgásegyenletének a meghatározására, amelyet impulzus mérlegegyenlet alakjában fogalmazzunk meg.

1.7.5. A mozgásegyenlet



1.7.13. ábra

Láttuk, hogy a tömegpontra vonatkozó 2. Newton-törvény a közeggel együtt mozgó Lagrange szemlélettel vihető át a kontinuummechanikába. A megoldást az (1.7.3) impulzus mérleg felírása jelentette:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho v_i dV = \int_{\Delta V} f_i dV + \oint_{\Delta A} \sigma_{ij} \cdot dA_j.$$

Mint azt már megbeszéltük, a ΔV térfogatú, ΔA felületű és Δm tömegű elemi „közegdarabkára” a $d\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot dV$ térfogati és a $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{A}$ felületi erők összege hat. Az általunk preferált (előnyben részesített) Descartes-koordinátás felírásban ($i = 1, 2, 3$)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho v_i dV = \int_{\Delta V} f_i dV + \oint_{\Delta A} \sigma_{ij} dA_j. \quad (1.7.6)$$

Az (1.7.6) egyenlet bal oldalán a $\rho_{pi} \equiv \rho \cdot v_i$ impulzus(komponens)-sűrűség szubsztanciális (idő)deriválás szerepel, azaz (1.6.4) szerint írható, hogy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho v_i dV = \int_{\Delta V} (\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i \cdot v_j)) dV.$$

Az (1.7.6) egyenlet egyenlet jobb oldalának a kifejtéséhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$\sigma_i \equiv (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}), \quad dA \equiv (dA_1, dA_2, dA_3).$$

Ezzel írható, hogy:

$$\oint_{\Delta A} \sigma_{ij} dA_j \rightarrow \oint_A \sigma_i dA = \int_V (\nabla \cdot \sigma_i) dV \rightarrow \int_V \partial_j \sigma_{ij} dV.$$

A jobboldali két erőhatás összegére kapjuk tehát, hogy

$$\int_{\Delta V} f_i dV + \oint_{\Delta A} \sigma_{ij} dA_j = \int_{\Delta V} (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV.$$

Végül átrendezés után az Euler-féle mozgásegyenletre adódik a következő:

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) - \partial_j \sigma_{ij} = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

A bal oldalon elvégezve a lehetséges kiemelést (mm. tagonkénti deriválás átírása) megkapjuk a kontinuum anyagra vonatkozó **Euler-féle (térelméleti) mozgásegyenletet**:

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.7)$$

Itt felismerhető a mérlegegyenletek általános struktúrája. Azaz

- $\rho_{pi} = \rho v_i$ impulzussűrűség (i -edik komponens),
- f_i impulzus forrás-sűrűség (i -edik komponens),
- $j_{pi} = (\rho v_i) v + \sigma_i$ impulzus áramsűrűség (i -edik komponens).

Látható, hogy az áramsűrűség két tagból áll. Az első egy konvektív tag. A második tag (a megállapodásunk szerint) egy konduktív áramsűrűség. Szavakban: **a feszültségtenzor i -edik vektorkomponense az impulzus (i -edik komponens) konduktív áramsűrűsége**. Hát ez nem mondható éppen „szemléletesnek”. Erre utaltunk a bevezetőben.

Az Euler-szemléletű (1.7.7) mozgásegyenlet (impulzuszórá) átírható szubsztanciális (Lagrange szemléletű) differenciális alakra is. Ennek kulcsa a szubsztanciális időderivált, amely szerint

$$d_t (\rho v_i) = \partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i) \cdot v_j,$$

Átrendezés után

$$\partial_t (\rho v_i) = d_t (\rho v_i) - \partial_j (\rho v_i) \cdot v_j,$$

A szorzatfüggvény deriválása következtében

$$\partial_j (\rho v_i v_j) = \partial_j (\rho v_i) \cdot v_j + \rho v_i \partial_j v_j.$$

Ezeket beírva az (1.7.7) Euler-féle mozgásegyenletbe, amely átrendezve

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) = f_i + \partial_j \sigma_{ij}, \quad i = 1, 2, 3,$$

azt kapjuk, hogy

$$d_t (\rho v_i) + \rho v_i \partial_j v_j = \partial_j \sigma_{ij} + f_i.$$

Végezzük el a baloldalon a (szubsztanciális) időderiválást:

$$d_t (\rho v_i) = \rho \cdot d_t v_i + v_i d_t \rho.$$

Ezzel az egyenletünk így alakul:

$$\rho \cdot d_t v_i + v_i (d_t \rho + \rho \cdot \partial_j v_j) - \partial_j \sigma_{ij} = f_i.$$

A baloldali zárójelben felismerhető (1.7.5), a tömegmegmaradás differenciális törvénye,

$$d_t \rho + \rho \partial_j v_j = 0.$$

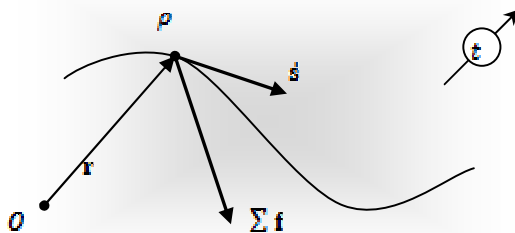
Ezzel adódik, a kontinuummechanika **Lagrange szemléletű (szubsztanciális) mozgásegyenlete:**

$$\rho \cdot d_t v_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i, \quad i = 1,2,3. \quad (1.7.8)$$

Tudjuk azonban, hogy az \mathbf{r} helyen lévő részecske $d\mathbf{s}$ elmozdulásból adódó sebessége a Lagrange szemlélet szerint $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}}$. Ezért

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} \rightarrow \rho \frac{d^2 s_i}{dt^2} = \partial_j \sigma_{ij} + f_i.$$

Az egyenlet valóban tükrözi a 2. Newton-törvénynek a „pontoszerű” szemléletét, csak a tömegpont és az erők helyére a megfelelő térfogati sűrűségeket kell írni.



1.7.14. ábra

1.7.6. Munkatétel, energiamérleg

Az egyetlen tömegpont esetén kapott munkatétel a kontinuum modellben (értelemszerűen) a kinetikus energiára felírt mérlegegyenlet formájában jelenik meg. Emlékeztetőül idézzük fel a pontmechanikánál tanultakat:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}.$$

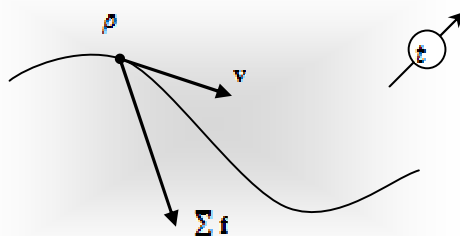
Megszorozzuk skalárisan \mathbf{v} -vel az egyenlet mindkét oldalát:

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\mathbf{F}.$$

A bal oldal áírható:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F}\mathbf{v} = P,$$

ahol P a tömegpontra ható erő teljesítménye.



1.7.15. ábra

Célszerű most (is) a Lagrange-féle (részecskekövető) szemléletből kiindulnunk. A kontinuum anyag (1.7.8) mozgásegyenlete:

$$\rho \cdot d_t v_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i, \quad i = 1,2,3.$$

A sebességgel való skaláris szorzás most a v_i -vel való szorzás utáni (i szerinti) szummázást jelent. De a \sum_i -t az index konvencióknk szerint nem írjuk ki, azaz

$$\rho v_i d_t v_i = v_i \partial_j \sigma_{ij} + v_i f_i. \quad (1.7.9)$$

A célunk az, hogy ezt az egyenletet egy mérlegegyenlet alakjára hozzuk, azaz

$$\partial_t \rho w + \partial_j j_{wi} = s_w,$$

ahol most w extenzív mennyiség, a kinetikus energia kell, hogy legyen. Mint látható, az (1.7.9) egyenlet ettől a formától bizony még eléggé messze van. Először (1.7.9)-nek a bal oldalával foglalkozunk. Az itt szereplő szubsztanciális deriválás lokális deriválással írható át a szokásos módon:

$$\rho v_i d_t v_i = \rho v_i (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) = \rho v_i \partial_t v_i + \rho v_i v_j \partial_j v_i. \quad (1.7.10)$$

(1.7.10) jobb oldalának az első tagja a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályok szerint így írható:

$$\rho v_i \partial_t v_i = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \partial_t \rho.$$

Itt kihasználtuk azt a tényt, hogy $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. (1.7.10) jobb oldalának a második tagja a deriválási műveletek alkalmazásával szintén átirható:

$$\rho v_i v_j \partial_j v_i = \rho v_j \partial_j \frac{v^2}{2} = \partial_j \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v_j \right) - \frac{1}{2} v^2 \partial_j (\rho v_j).$$

Mindezekkel az átalakításokkal (1.7.10)-re (azaz (1.7.9) bal oldalára) az adódik, hogy:

$$\rho v_i d_t v_i = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{v^2}{2} [\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j)] + \partial_j \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v_j \right).$$

De a tömegre vonatkozó kontinuitási egyenlet (tömegmegmaradás) miatt $\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j)$, ezért a jobb oldali középső tag kiesik. Végül (1.7.9) bal oldalára azt kaptuk, hogy

$$\rho v_i d_t v_i = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v_j \right).$$

Ezek után áttérünk (1.7.9) jobb oldalának az átalakítására. Alkalmazzuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$\partial_j (v_i \sigma_{ij}) = v_i \partial_j \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \partial_j v_i.$$

Ezzel (1.7.9) jobb oldalának első tagja így írható:

$$v_i \partial_j \sigma_{ij} = \partial_j (v_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \partial_j v_i.$$

Ennek az első tagja egy divergencia műveletet tartalmaz, ami átvihető (1.7.9) bal oldalára. Ezzel az átrendezéssel (1.7.9) végső alakja a következő lesz:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v_j - \sigma_{ij} v_i \right) = v_i f_i - \sigma_{ij} \partial_j v_i.$$

Ezzel a célunkat elértük. A mozgásegyenletből kiindulva sikerült a kinetikus energiára egy szokásos mérlegegyenletet kapni. Az egyes tagok fizikai jelentése az egyenlet szerkezetéből világosan leolvasható:

- $(1/2) \rho v^2$ kinetikus energiasűrűség,
- $(1/2) \rho v^2 \cdot v_j - \sigma_{ij} v_i$ kinetikus energiaáram-sűrűség (konvektív és konduktív része),
- $v_i f_i - \sigma_{ij} \partial_j v_i$ kinetikus energiasűrűség forrása.

Itt ismét látható, hogy a $j_{kinj}^{CND} \equiv \sigma_{ij} v_i$ „konduktív kinetikus energiaáram-sűrűség” nem igazán „szemléletes”.

1.7.7. A forrástagok fizikai jelentése

Próbáljuk meg fizikailag értelmezni a forrástagokat. Az első tag ($v_i f_i$) az egyetlen tömegpont esetén bevezetett $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ analógiájára egy teljesítménysűrűséget ad, amelynek forrása a térfogati erő, azaz

$$P_f \equiv f_i v_i.$$

A mértékegysége

$$[P_j] = [\dot{f}_i v_i] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s m}^3} = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

A második tagnak szintén teljesítménysűrűségnek kell lennie, de a tömegpontról ennek nincsen analógiája. Ezért az értelmezésnél az alapdefiníciókhoz kell visszanyúlni. Azaz

$$P_\sigma \equiv -\sigma_{ij} \partial_j v_i = -\sigma_{ij} \partial_j \frac{ds_i}{dt}.$$

Áttérünk infinitezimálisokra és mindkét oldalt megszorozzuk dt -vel:

$$P_\sigma dt \equiv -(\sigma_{ij} \partial_j v_i) dt = -\sigma_{ij} \partial_j ds_i.$$

A jobboldalon az infinitezimális képzés felcserélhető, azaz:

$$-\sigma_{ij} \partial_j ds_i = -\sigma_{ij} d(\partial_j s_i). \quad (1.7.11)$$

Tudjuk azonban, hogy a zárójelben lévő kifejezés éppen az $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ elmozdulás-vektornak a derivált tenzora:

$$\partial_j s_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{ij}.$$

Ezért a (1.7.11) forrástag így írható:

$$P_\sigma dt \equiv dE_\sigma = -\sigma_{ij} ds_{ij}.$$

Tudjuk, hogy a derivált tenzor két részre bontható: $s_{ij} = a_{ij} + \epsilon_{ij}$. És ezzel

$$P_\sigma dt \equiv dE_\sigma = -\sigma_{ij} da_{ij} - \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

Tudjuk azt is, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, valamint a_{ij} (**!!! Jó ez így?**) a derivált tenzor antiszimmetrikus része: $a_{ij} = -a_{ji}$. Mivel a dE_σ kifejezésben mindkét (i és j) indexre szummázni kell, ezért $\sigma_{ij} da_{ij} = 0$. Végülis marad az, hogy

$$P_\sigma dt \equiv dE_\sigma = -\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

Ez pedig a deformáció ellen végzett munka. Speciális esetben, ha pl. rugalmas deformációról van szó, akkor a feszültségtenzor és a deformációs tenzor között lineáris a kapcsolat, azaz

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Ekkor definiálható egy **rugalmas potenciális energiasűrűség** a következőképpen:

$$u_R \equiv \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

ebből pedig a feszültségtenzor megkapható:

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial u_R}{\partial \epsilon_{ij}},$$

Látható tehát, hogy

$$P_\sigma = \frac{dE_\sigma}{dt} = \frac{du_R}{dt} \equiv R_R.$$

Mindezt a lineáris rugó analógiájára csinálhattuk meg:

$$F = -Dx, \quad U_R = \frac{1}{2} Dx^2, \quad \dot{F} = -\frac{dU_R}{dx}.$$

1.8. Rugalmas közegek dinamikája

Az eddigiekben megismerkedtünk a deformálható közegek kontnuummechanikájával. A tömegpontokra kimondott (axiomatikus) mozgásegyenletből (Newton 2. törvénye) kiindulva (mást nem is tehettünk volna!) sikerült az impulzusra egy mérlegegyenletet konstruálni. Ez a deformálható kontnuum anyag Euler-féle mozgásegyenlete.

$$\partial_i(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ehhez még hozzá kell vennünk a tömegmegmaradás törvényét:

$$\partial_t + \partial_j(\rho v_j) = 0.$$

Ez összesen 4 darab egyenlet. Az ismeretlenek száma azonban 10 ($\rho, \mathbf{v}, \hat{\sigma}$). Ez azt jelenti, hogy az ismeretlenek nem lehetnek egymástól függetlenek. Valóban, az erőhatások és a deformáció közötti $\mathbf{v} \leftrightarrow \hat{\sigma}$ kapcsolatot a közeg anyagi tulajdonságai szabják meg. Ezeket pedig meg kell adnunk ahhoz, hogy a feladat megoldható legyen.

A rugalmas közeget az definiálja, hogy lineáris kapcsolat van az erőhatás és a deformáció között. Ez a **Hooke-törvény**, amely a legáltalánosabb formában a következő:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}.$$

Látható, hogy a C_{ijkl} (negyedrendű tenzornak) összesen $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ darab eleme van. Természetesen ezek nem mind különbözőek, hiszen mind a deformáció, mind pedig a feszültségtenzor szimmetrikus, így mindkettőnek (külön-külön) 6 darab független eleme van. Ez azt jelenti, hogy C_{ijkl} -t elvileg $6 \times 6 = 36$ különböző (független) adat határozza meg.

A fenti lineáris kapcsolat azt jelenti, hogy a már bevezetett rugalmas potenciális energia áírható a következőképpen:

$$u_R = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij},$$

és így

$$u_R = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

Nevezzük át a tenzorok elemeit a következőképpen:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_6 \\ \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_4 & \epsilon_2 & \epsilon_6 \\ \epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrixelemek között a kapcsolat lineáris, ezért ez igaz a 6 darab különböző elemre is. Ezt mátrix alakba írva:

$$\sigma_K = D_{KL} \epsilon_L, \quad K, L = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Vigyázat a $\hat{\sigma}$ nem tenzor, hiszen nem két (fizikai) vektor közötti lineáris kapcsolatot ad meg. Csupán hat darab skalár adatot (ϵ_L) egy másik hat adatba (σ_K) „transzformál”! A deformációs energia megtartja a kvadratikus alakját, tehát az új jelölés szerint

$$u_R \propto \sigma_K \epsilon_K \propto D_{KL} \epsilon_K \epsilon_L, \quad K, L = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Az energia nem szabad, hogy változzon, ha a szummázó indexeket megcseréljük azaz

$$D_{KL} \epsilon_K \epsilon_L = D_{LK} \epsilon_L \epsilon_K.$$

Mivel a szorzatban a tényezők felcserélhetők,

$$D_{KL} \epsilon_K \epsilon_L = D_{LK} \epsilon_L \epsilon_K = D_{LK} \epsilon_K \epsilon_L.$$

Az első és az utolsó kifejezést összehasonlítva adódik, hogy:

$$D_{KL} = D_{LK}.$$

Tehát $\hat{\sigma}$ egy szimmetrikus mátrix, azaz 21 darab független adata van. Részletezve:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

A \mathbf{D} mátrixban csak a 21 darab különböző elemet jelöltük be. Így C_{ijkl} -nek a legáltalánosabb asszimmetria esetén is „csak” 21 darab független eleme lehet.

Drasztikusan lecsökken az elemek száma, ha homogén izotróp anyagot veszünk. Ekkor nyilvánvaló, hogy a közegben fizikailag nincsenek kitüntetett irányok, tehát mind a σ_{ij} , mind pedig az ϵ_{kl} egyszerre diagonalizálható. A főértékek között (az izotrópia miatt) csak a következő lineáris kapcsolat állhat fenn:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & a & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & b & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

A \mathbf{D} mátrix többi eleme láthatóan teljesen érdektelen. Tehát összesen két független rugalmas állandó maradt (a és b). Ez azt is jelenti, hogy ha nem is vagyunk főtengely-rendszerben, a \mathbf{D} mátrix minden eleme csak a és b függvénye lehet. Elvégezve a mátrixszorzást és a $-b\epsilon_i + b\epsilon_i = 0$ kifejezésekkel bővítve, a főértékek között a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a - b) \cdot \epsilon_1 + b \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \\ \sigma_2 &= (a - b) \cdot \epsilon_2 + b \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \\ \sigma_3 &= (a - b) \cdot \epsilon_3 + b \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3). \end{aligned}$$

Vezessünk be új rugalmas állandókat a következő definíciókkal:

$$2\mu \equiv a - b, \quad \lambda \equiv b.$$

Ezzel főértékek között a következő kapcsolatot kapjuk:

$$\sigma_i = 2\mu \cdot \epsilon_i + \lambda \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Visszatérve tetszőleges koordinátarendszerbe belátható (ennek bizonyítását az Olvasóra bízunk), hogy

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2\mu \epsilon_{ii} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

ahol (amint az már ismeretes) a relatív térfogatváltozást jelölje

$$\Theta \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3.$$

Mint az már ismeretes, ez a koordinátarendszer forgatásával szemben invariáns mennyiség. Azaz a homogén izotróp rugalmas anyagra a következő rugalmassági tulajdonság érvényes:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \cdot \Theta. \quad (1.8.1)$$

Az Euler-féle mozgásegyenletben a közeg pontjainak v_i sebességkomponense szerepel. Mind ez, mind pedig a deformációs tenzor a részecskék relatív elmozdulásával van kapcsolatban, hiszen

$$v_i = \partial_t s_i, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i s_j + \partial_j s_i).$$

Az Euler-féle mozgásegyenletről célszerű lesz, ha a Lagrange-féle tömegpont követő (szubsztanciális) szemléletre térünk át. Eszerint a mozgásegyenletünk differenciális alakja és a tömegmegmaradás tétele a következő:

$$\rho \cdot \mathbf{d}_t v_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i, \quad \partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0.$$

A szubsztanciális deriválás definíciója:

$$\mathbf{d}_t v_i = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i.$$

Szilárd testeknél (rugalmas deformációk esetén) a $\partial_j v_i$ sebesség gradiens elhanyagolható, ezért a mozgásegyenlet alakja a következő lesz:

$$\rho \cdot \partial_t v_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i.$$

A jobb oldal első tagjába beírható az (1.8.1) összefüggés, azaz

$$\partial_j \sigma_{ij} = \partial_j (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \cdot \Theta) = 2\mu \cdot \partial_j \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \cdot \partial_j \Theta = 2\mu \cdot \partial_j \epsilon_{ij} + \lambda \cdot \partial_i \Theta.$$

Ide beírva a deformációs tenzor $(1/2)(\partial_i s_j + \partial_j s_i)$ definíciós alakját:

$$\partial_j \sigma_{ij} = 2\mu \cdot \partial_j \left[\frac{1}{2} (\partial_i s_i + \partial_i s_j) \right] + \lambda \cdot \partial_i \Theta = \mu \cdot \partial_j \partial_i s_i + \mu \cdot \partial_j \partial_i s_j + \lambda \cdot \partial_i \Theta.$$

Ezt tovább alakítva,

$$\mu \cdot \partial_j \partial_i s_j + \mu \cdot \partial_i (\partial_j s_j) + \lambda \cdot \partial_i \Theta = \mu \cdot \Delta s_i + \mu \cdot \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{s}) + \lambda \cdot \partial_i \Theta.$$

A „nablásított” jelölést a jobb áttekinthetőség miatt használtuk. Az előzőekben már szerepelt, hogy az elmozdulás mező divergenciája a relatív térfogat változást adja: $\nabla \cdot \mathbf{s} = \Theta$. Ezzel kapjuk, hogy

$$\partial_j \sigma_{ij} = \mu \cdot \Delta s_i + (\mu + \lambda) \cdot \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{s}).$$

Felhasználva még a $v_i = \partial_t s_i$ definíciót, a mozgásegyenlet egy hullámegyenlet alakját veszi fel:

$$\rho \cdot \partial_t^2 s_i = \mu \cdot \Delta s_i + (\mu + \lambda) \cdot \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{s}) + f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8.2)$$

Keresett az elmozdulásmező, azaz $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$. Tovább egyszerűsödik az egyenletünk, ha képezzük az (1.8.2) hullámegyenlet divergenciáját. Ez azt jelenti, hogy mindkét oldalon végrehajtjuk a $\sum_i \partial_i$ műveletet.

$$\rho \cdot \partial_t^2 (\partial_i s_i) = \mu \cdot \Delta (\partial_i s_i) + (\mu + \lambda) \cdot \partial_i \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{s}) + \partial_i f_i.$$

Tudjuk azonban, hogy $\partial_i s_i = \nabla \cdot \mathbf{s} = \Theta$, így aztán:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \partial_t^2 \Theta &= \mu \cdot \Delta \Theta + (\mu + \lambda) \cdot \Delta \Theta + \partial_i f_i = \\ &= (2\mu + \lambda) \cdot \Delta \Theta + \partial_i f_i. \end{aligned}$$

Ha térfogati erők nem hatnak, akkor $f_i = 0$ és

$$\Delta \Theta = \frac{\rho}{2\mu + \lambda} \partial_t^2 \Theta.$$

Ez már a jól ismert háromdimenziós hullámegyenlet. Ennek megoldása a $\Theta(\mathbf{r}, t)$ a közeg relatív térfogatváltozása. A megoldásul adódó „kompressziós” fázishullám sebessége leolvasható a hullámegyenletről:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}.$$

A rugalmas közegben azonban nem csak kompressziós hullámok gerjeszthetők. Induljunk ki ismét a hullámegyenletünkéből:

$$\rho \cdot \partial_t^2 s_i = \mu \cdot \Delta s_i + (\mu + \lambda) \cdot \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{s}) + f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8.3)$$

Legyen most is $f_i = 0$. Egyszerűbben célhoz érünk, ha tisztán „nablásított” formát használunk, azaz mindkét oldalra alkalmazzuk a $\sum_i \mathbf{e}_i$ műveletet. Ne felejtsük el, hogy $\mathbf{s} = \sum_i \mathbf{e}_i s_i$ és $\nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \partial_i$. Kapjuk, hogy

$$\rho \cdot \partial_t^2 \mathbf{s} = \mu \cdot \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda) \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{s}).$$

Vegyük mind a két oldal „rotációját”, ami a $\nabla \times$ műveletet jelenti.

$$\rho \cdot \partial_t^2 (\nabla \times \mathbf{s}) = \mu \cdot \Delta (\nabla \times \mathbf{s}) + (\mu + \lambda) \cdot (\nabla \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{s})).$$

Tudjuk azonban, hogy az utolsó tag értéke nulla, mert ott egy gradiens függvény rotációja szerepel. Vezessük be a következő mennyiséget: $\boldsymbol{\varphi} \equiv \nabla \times \mathbf{s}$. Ezzel a hullámegyenletünk a következő lesz:

$$\rho \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi} = \mu \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi},$$

amiből

$$\Delta \varphi = \frac{\rho}{\mu} \cdot \partial_i^2 \varphi.$$

Az előbbiekkal analógiában deformáció terjedési sebessége most $v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

A φ vektorral jellemzett hullám jellegének a megértéséhez elegendő visszaemlékeznünk a deformáció tenzor bevezetésekor követett gondolatmenetre. Mint azt láttuk, az $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező derivált tenzorának az antiszimmetrikus része

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ij} - s_{ji})$$

azaz éppen a $\nabla \times \mathbf{s}$ elemeit tartalmazza. Ennek hatása pedig egy forgatásnak felel meg, azaz

$$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{r} = \mathbf{d}\varphi \times \mathbf{r}.$$

Ezeket a φ -vel jellemzett hullámokat ezért **torziós hullámoknak** nevezzük.