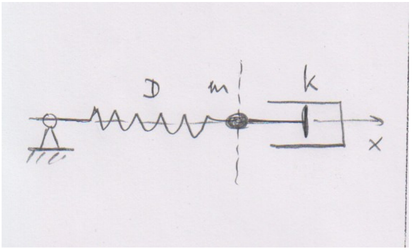
‚Lineáris rendszerek analízise.

A cím talán túl általánosnak tűnik. Felmerülhet a kérdés, hogy miképpen kerül egy egyszerű, speciális mechanikai rendszer az általános érdeklődésünk középpontjába.

A válasz egyszerű. A lineáris mechanikai oszcillátornak olyan tulajdonságai vannak, amelyek alkalmassá teszik őt arra, hogy a példáján keresztül betekintést nyerjünk a lineáris rendszerek jellegzetes viselkedésébe. Mivel a feladat szemléletes (ui. hétköznapi, makroszkopikus tapasztalatokon alapul) ezért könnyen megérthető. Ennek kapcsán pedig általános (rendszer konkrét megvalósításától független) törvényeket ismerhetünk fel. Ezek aztán a Fizika más területein is sikerrel alkalmazhatók.

Tekintsünk egy csillapított harmonikus mechanikai oszcillátort. Ennek egy konkrét megvalósítása a következő. Legyen egy „*m*" tömegű pont, amelyet egy rugóval az „*x*" tengely origójához erősítettünk. A rugó nyugalmi hossza zérus és „erősségét" a „*D*" adattal jellemezzük. Hasson a tömegpontra egy sebességgel arányos („*k*") csillapító erő is.

A mozgásegyenlet tehát a következő



1.ábra

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} - Dx$$

Meg kell határoznunk az $x(t)$ függvényt úgy, hogy az eleget tegyen az ún. kezdeti feltételeknek. Azaz

$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = v_0$$

Átrendezés után osszuk el az egyenletet az „*m*" tömeggel. Ennek eredménye a következő.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

ahol

$$\alpha \equiv \frac{k}{2m} \qquad \text{és}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A továbbiakban mindig ezt a jelölést fogjuk használni!

MEGJEGYZÉS:

Matematikai alakját tekintve ez egy „állandó együtthatójú, másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenlet". „Állandó együtthatójú", mert $\{\alpha, \omega_0\}$ időtől független állandók. „Közönséges", mert csak egy változós függvény „*x(t)*" szerepel benne és „másodrendű" mert $\ddot{x}(t)$-t tartalmaz. „Lineáris", mert a keresett *x(t)* függvényen csak „lineáris" matematikai műveleteket hajtunk végre (nincsen benne pl. $x^2, x \cdot \dot{x}, \sqrt{x}, \ldots stb$ kifejezés). Végül azért „homogén", mert az egyenlet jobb oldalán „*0*" szerepel. Ha ott egy tetszőleges előre megadott *f(t)* függvény volna akkor az egyenlet „inhomogén" lenne. A későbbiekben ilyennel gyakran fogunk találkozni. Sőt ez lesz a vizsgálódásunk fő témája.

Látható, hogy olyan függvény lesz a megoldás, amelyiknek első és másodrendű deriváltja magával a függvénnyel arányos. Ekkor ugyanis az kiesik a mozgásegyenletből. Ilyen függvény az

$$x(t) = \exp\{\lambda \cdot t\},$$

hiszen

$$\dot{x}(t) = \lambda \cdot \exp\{\lambda \cdot t\}$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 \cdot \exp\{\lambda \cdot t\}$$

Ezeket beírva az egyenletbe

$$\left(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \exp(\lambda t) = 0$$

Ennek természetesen minden „t" időpillanatban igaznak kell lennie. Mivel $x(t) = \exp\{\lambda \cdot t\} \neq 0$ ezért

$$\left(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^{\,2}\right) = 0$$

Ez λ-ra egy másodfokú egyenlet, amelynek két megoldása van

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases} \qquad \text{GYL}$$

Mivel a differenciálegyenletünk lineáris, ezért a λ_1-hez és a λ_2-höz tartozó megoldások lineáris kombinációja is megoldása az egyenletnek. A mozgásegyenlet általános megoldása tehát

$$x(t) = a_1 \exp\{\lambda_1 t\} + a_2 \exp\{\lambda_2 t\}$$

Az $\{a_1, a_2\}$ a kezdeti feltételekből határozható meg. A GYL egyenlet lehetőséget ad arra, hogy az oszcillátor lehetséges mozgásait osztályozzuk. Ennek megfelelően beszélhetünk:

a.) Túlcsillapításról,
b.) határcsillapításról és
c.) alulcsillapításról.

a.) A túlcsillapítás ($k > \sqrt{4mD}$)

Tekintsük a GYL egyenlőséget, amely a λ lehetséges értékeit adja meg.

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$, azaz részletezve

Ha $\alpha > \omega_0$, akkor $k > \sqrt{4mD}$ ami azt jelenti, hogy a „k" csillapítási tényező egy bizonyos értéknél nem lehet kisebb.

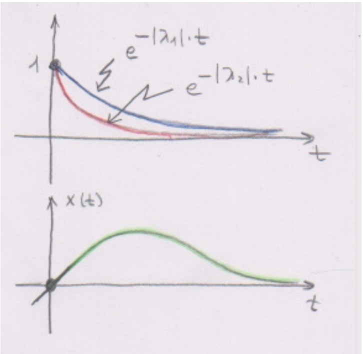
$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -|\lambda_1| < 0$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -|\lambda_2| < 0$$

Tehát mind a két érték negatív. Az általános megoldás tehát

$$x(t) = a_1 \cdot \exp\{-|\lambda_1| \cdot t\} + a_2 \cdot \exp\{-|\lambda_2| \cdot t\}$$

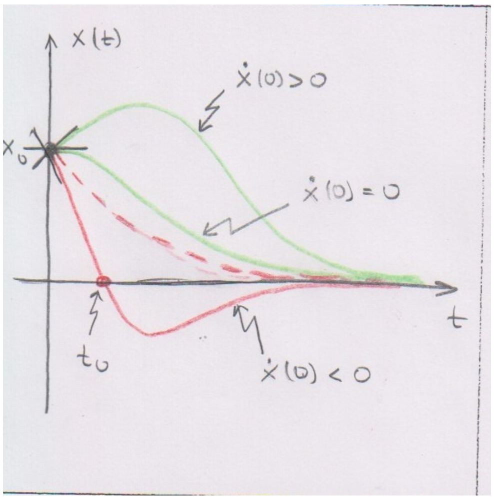
Tipikus mellékfeltételek esetén a tömegpont jellegzetes *x(t)* mozgást produkál.

$$x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$



2. ábra

$$x(0) = x_0 \quad \text{és} \quad \dot{x}(0) \gtreqless 0$$



3 ábra

b.) A határcsillapítás ($k = \sqrt{4mD}$ **)**

$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

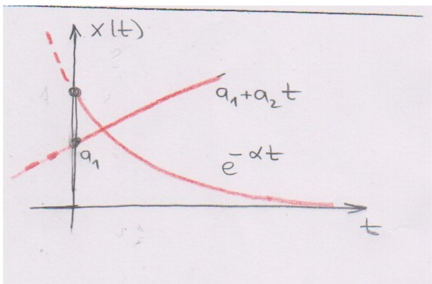
Ha $\alpha = \omega_0$ (ua. $k = \sqrt{4mD}$ **),** akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Ekkor a látszólag csak egy megoldás van.

$$x(t) = a \cdot \exp\{-\alpha \cdot t\}$$

Ez azonban nyílván nem elég, hiszen két kezdeti feltételünk van és csak egy („a") ismeretlen paraméter. A teljes megoldást úgy kapjuk, ha feltesszük, hogy $a = a(t)$. Valóban, a mozgásegyenletbe való visszahelyettesítéssel megkapjuk a végleges megoldást

$$x(t) = (a_1 + a_2 t) \cdot \exp\{-\alpha \cdot t\}$$

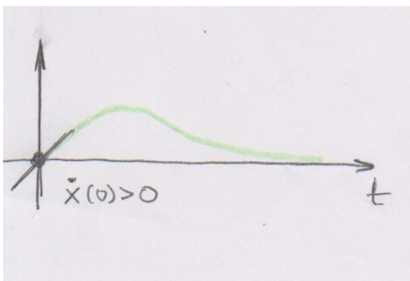
Az általános megoldás tehát két függvény szorzata.



4.ábra

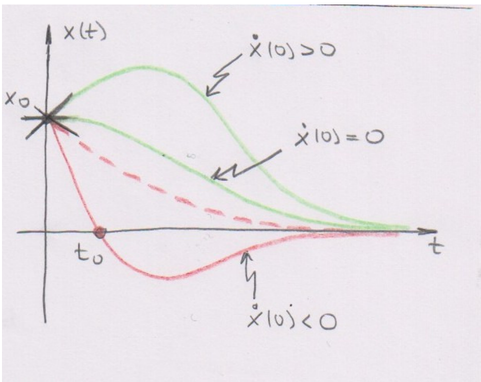
A különböző tipikus kezdeti feltételek ugyanazok, mint az előző esetben és az x(t) függvények is igen hasonlóak.

$$x(0) = 0 \;\; \text{és} \;\; \dot{x}(0) = v_0$$



5.ábra

$x(0) = x_0$ és $\dot{x}(0) \gtreqless 0$



6.ábra

c.) Az alulcsillapítás ($k < \sqrt{4mD}$) vagy csillapított rezgőmozgás

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Ha $\alpha < \omega_0$, akkor $k < \sqrt{4mD}$ ami azt jelenti, hogy a „k” csillapítási tényező egy bizonyos értéknél (határcsillapítás) kisebb. Ekkor a gyök alatt negatív szám áll és így λ komplex szám lesz.

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \equiv -\alpha \pm i\omega_\alpha,$$

ahol

$$\omega_\alpha \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

Az általános megoldás tehát

$$x(t) = a_1 \cdot \exp\{\lambda_1 \cdot t\} + a_2 \cdot \exp\{\lambda_2 \cdot t\} = \exp\{-\alpha \cdot t\} \cdot \left[a_1 \cdot e^{i\omega_\alpha \cdot t} + a_2 \cdot e^{-i\omega_\alpha \cdot t}\right]$$

De *x(t)* valós kell, hogy legyen. Ránézésre látszik, hogy ez csak akkor teljesíthető, ha $\{a_1, a_2\}$ -t komplex számoknak tekintjük. Ekkor annak feltétele, hogy *x(t)* valós egyen a következő:

$$x(t) = x^*(t),$$

azaz a megoldásfüggvény egyenlő e komplex konjugáltjával. Ennek az a feltétele, hogy

$$a_1^* = a_2 .$$

Ezért kapjuk, hogy

$$a_1 = a \cdot e^{+i\varphi} \quad \text{és}$$

$$a_2 = a \cdot e^{-i\varphi}$$

Ekkor az általános (valós) megoldás a következő lesz

$$x(t) = 2a \cdot \exp\{-\alpha \cdot t\} \cdot [\cos(\omega_\alpha \cdot t + \varphi)]$$

Ez valós függvény és két ismeretlen paramétert $\{a, \varphi\}$ tartalmaz, amelyeket a két kezdeti feltétel határoz meg. Természetesen a $\varphi \to \varphi - \pi/2$ (transzformációval, ami az időskálán $T_\alpha/4$ eltolást jelent) a mozgásfüggvény így is írható

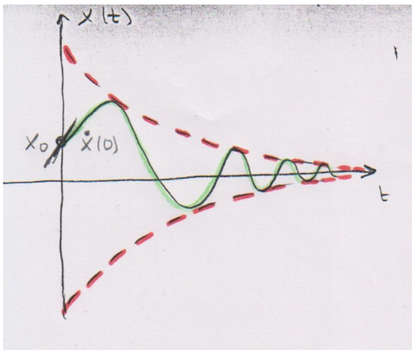
$$x(t) = a \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi)$$

Ha pedig a szögfüggvényt felbontjuk, akkor a következő alakot is használhatjuk

$$x(t) = e^{-\alpha t}[a \sin(\omega_\alpha t) + b \cos(\omega_\alpha t)]$$

A két új ismeretlen paraméter most az $\{a, b\}$

A kapott megoldások valóban egy csillapodó rezgést adnak meg, amelynek körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan oszcillátor (saját) körfrekvenciája.



7.ábra

Vegyük észre, hogy az eddigi peremfeltételek kötött nem szerepelt a

$x(0)=0$

$\dot{x}(0)=0$

Könnyű ellenőrizni, hogy ebben az esetben a megoldás csak a $x(t)\equiv 0$ függvény lehet. A fizikai magyarázat egyszerű.

Rendezzük át a mozgásegyenletünket és alakítsuk át a már ismert módon

$$m\ddot{x}+Dx=-k\dot{x} \qquad \Big|\cdot \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Dx^2\right)=-k\dot{x}\dot{x} \qquad \Big|\cdot dt$$

Azaz differenciális alakban írva

$$d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Dx^2\right)=-k\dot{x}dx$$

Mivel pedig a rendszer mechanikai energiája definíció szerint

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Dx^2,$$

ezért írható, hogy

$$dE=(-k\dot{x})dx \qquad \text{(AMT)}$$

Ez a jól ismert **általánosított munkatétel**, amely szerint tehát a rendszer mechanikai energiáját a súrlódási erő munkája állandóan csökkenti. Az oszcillátor mozgása során a mechanikai energia nem marad állandó, mintegy „eltűnik" a rendszerből. Ezért a csillapított oszcillátor nem egy konzervatív rendszer. Ezeket „disszipatív" rendszernek nevezzük.

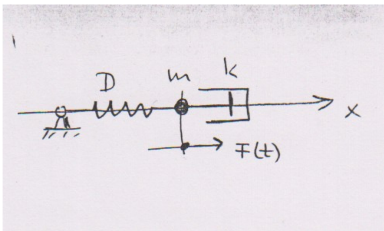
Ámmost { $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$ }kezdeti feltételek esetén $E=0$ így nincsen semmi, ami az energia disszipációt fedezné. Azaz ebben az esetben csak az $x(t)\equiv 0$ „triviális megoldás" jöhet szóba.

Más lesz majd a helyzet, amikor egy kezdetben energiamentes oszcillátorra még egy gerjesztő erő is hat. Ekkor a disszipációt a gerjesztő erő által betáplált energia fedezi.

Eddig, a csillapított oszcillátorunkra a „t>0" időtartományban nem hatott (külső) erő. Ezért ezt „**gerjesztetlen (vagy szabad) , csillapított oszcillátornak**" nevezzük. A kezdeti feltételek megadása egy kinematikai kiindulás volt. Természetesen tudjuk, hogy ez azt jelenti, hogy a „*t=0*" időpontban az oszcillátor mechanikai energiája nem nulla. Ezt az energiát előzőleg („$t<0$") az oszcillátorba valahogyan be kellett táplálni. Ezt pedig csak valamilyen külső erővel tudtuk elérni. Azaz az oszcillátor „preparálása" fizikailag (ez most a mechanika) szükségképpen csak erőhatásokon keresztül történhet. Eddig nem foglakoztunk ezzel. A kezdeti feltételeket adottnak vettük és nem firtattuk annak fizikai (dinamikai) okait.

Most tételezzük fel, hogy az oszcillátorra egy külső *F(t)* erő is hat. Ezt nevezzük „**gerjesztett, csillapított oszcillátornak"**. Ekkor a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F(t)$$



8. ábra

Az „*m*"-el való átosztás után kapjuk, hogy

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Ahol az $\{\alpha, \omega_0\}$oszcillátort jellemző állandókat már az előbbiekben bevezettük és

$$f(t) \equiv \frac{1}{m} \cdot F(t)$$

Ez egy lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, amelynek matematikai megoldási technikája közismert.

Keresni kell az inhomogén $x_{IH}(t)$ egyenlet általános megoldását. Ez két ismeretlen paramétert fog tartalmazni, amit a kezdeti feltételekkel határozunk meg. Azaz

$$x_{IH}(0) = x_0$$
$$\dot{x}_{IH}(0) = v_0$$

Könnyen megmutatható, hogy az $x_{IH}(t)$ általános megoldás két függvény összege lesz.

$$x_{IH}(t) = x_H(t) + x_{IHP}(t) \qquad \text{IH}$$

Ahol $x_H(t)$ a homogén egyenlet általános megoldása (eddig az előzőekben ezzel foglakoztunk), amely két szabad paramétert tartalmaz. Az $x_{IHP}(t)$ az inhomogén egyenletnek egy tetszőleges induló értékekkel { $x_{IHP}(0)$ és $\dot{x}_{IHP}(0)$ } rendelkező megoldása. Ez tehát konkrét (határozott) megoldás, amely nem tartalmaz semmiféle ismeretlen paramétert. Neve „partikuláris" (részleges, nem teljes) megoldás.

Tehát

$$\ddot{x}_H + 2\alpha\dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0$$
$$\ddot{x}_{IHP} + 2\alpha\dot{x}_{IHP} + \omega_0^2 x_{IHP} = f(t)$$

Adjuk össze a két egyenletet, ekkor a deriválás „összegszabálya" miatt azt kapjuk, hogy

$$(\ddot{x}_H + \ddot{x}_{IHP}) + 2\alpha(\dot{x}_H + \dot{x}_{IHP}) + \omega_0^2(x_H + x_{IHP}) = f(t)$$

Ez pedig a $x_{IH}(t) = x_H(t) + x_{IHP}(t)$ definíció szerint így írható.

$$(\ddot{x}_{IH}) + 2\alpha(\dot{x}_{IH}) + \omega_0^2(x_{IH}) = f(t)$$

Az $x_{IH}(t)$ ismét két paramétert tartalmaz (ezek az $x_H(t)$-ben szereplő paraméterek), amit az $x_{IH}(t)$-re kirótt kezdeti feltételekkel határozunk meg. Azaz, amint azt már említettük is

$$x_{IH}(0) = x_0$$
$$\dot{x}_{IH}(0) = v_0$$

Vizsgáljuk meg a kapott megoldás fizika értelmezését.
Az előzőekből tudjuk, hogy

$$\lim_{t \to +\infty} x_H(t) = 0$$

azaz a homogén egyenlet megoldása „$t \to +\infty$" esetén eltűnik. Ezért ezt „tranziens (megoldásnak)" nevezik. Elegendően hosszú idő múlva tehát

$$\lim_{t>>1} x_{IH}(t) \approx x_{IHP}(t)$$

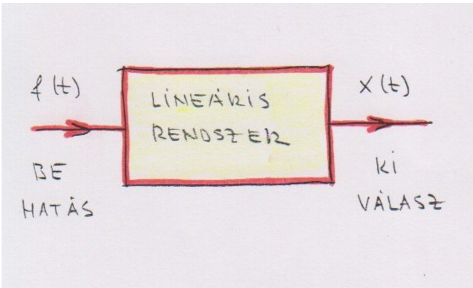
Ezért az $x_{IHP}(t)$-t „állandósult” megoldásnak nevezzük. Látható tehát, hogy az $x_H(t)$ tranziens csak a kezdeti értékek kielégítésére szolgál, a hosszú távú megoldásba már nem szól bele. A feladatunk valójában tehát az inhomogén **egyenlet egy partikuláris megoldásának a megkeresése**.

Ez az a pont, ahol alkalmunk nyílik arra, hogy az $x_{IHP}(t)$ állandósult megoldásnak a lehető legáltalánosabb tulajdonságait feltárjuk. A következőkben az egyszerűség végett $x_{IHP}(t) = x(t)$ jelölést fogjuk használni.

A kauzalitás (ok-okozat) törvénye és a Green-függvény

A kauzalitás röviden azt jelenti, hogy „az ok (időben) mindig megelőzi az okozatot”.Ez a világunkban (ezen most a klasszikus fizikát kell érteni) mindennap megfigyelhető törvény. Még soha nem találtunk kivételt alóla. A rengeteg tapasztalati tény arra a bátorít minket, hogy alapvető hipotézisként kimondjuk, hogy minden fizikai rendszernek „kauzálisnak” kell lennie. Meg kell adnunk a „kauzalitás” matematikai megfogalmazását. A következőkben lineáris rendszerekkel foglalkozunk. Ezek eléggé elterjedtek így a fizikai jelenségek nagy részét lefedik. A szemléletes precizitás érdekében új fogalmakat vezetünk be.

Egy valamilyen rendszer „blokksémája” a következő



9. ábra

A „bemeneti” jelet (input) a rendszer egy „kimenő” jellé (output) alakítja. A bemeneti jel egy fizika mennyiség időbeli függvénye, a kimenő jel egy másik fizikai mennyiség időfüggvénye. Mint látható, ez a rendszerelméleti megközelítés igen általános séma. Azt az evidenciát mondja ki, hogy a környezeti hatásokra egy rendszer valahogyan reagálni fog. Igaz lehet a tőzsdére éppúgy mint egy idegsejtre. Természetesen ezek igen bonyolult nem lineáris rendszerek. Amelyek általában sokféle, egyszerre ható bemenő jellel és ugyancsak sokféle, egyszerre megjelenő kimenő jellel rendelkeznek. Ezek analízise külön speciális szaktudományos területet jelent.

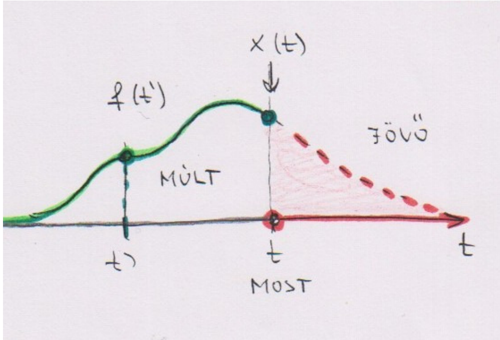
Mi most csak **lineáris fizikai rendszerekkel** foglalkozunk. A „fizika” itt azt jelenti, hogy zömmel a Fizika tudományában elsajátított ismeretekre van szükség a feladat megoldásához.

A bemeneti jelet gyakran „gerjesztésnek” mondjuk és a kimenő jelet pedig „válaszfüggvénynek”. Ez azt a szemléletet sugallja, hogy a rendszer reá ható adott (reá kapcsolt) gerjesztés hatására valahogyan reagálni fog amit mi egy „válaszfüggvény” formájában detektálhatunk.

A szemléletmódot és az alkalmazott matematikai technikát a csillapított mechanikai oszcillátor példáján fogjuk bemutatni. Mint azt majd látjuk ez nem jelent olyan nagy megszorítást. Ennek egyik oka, hogy az oszcillátor modell igen széles körben alkalmazható a makro és mikrofizika szinte minden területén. Ez azért van így, mert minden rendszernek az egyensúlyi állapota körüli dinamikája oszcillátorral modellezhető, függetlenül a rendszer konkrét fizikai megvalósulásától. Erről még később is ejtünk néhány szót.

Egy lineáris rendszer kauzalitása azt jelenti, hogy a gerjesztés és a válaszfüggvény között lineáris kapcsolat áll fenn. De úgy, hogy az „ok-okozat” időbeli sorrendje szigorúan megkötött. Ennek matematika alakja a következő.

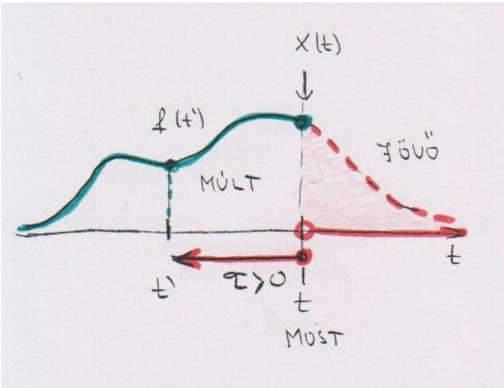
$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} R_f\,(t-t')\cdot f\,(t')dt'$$



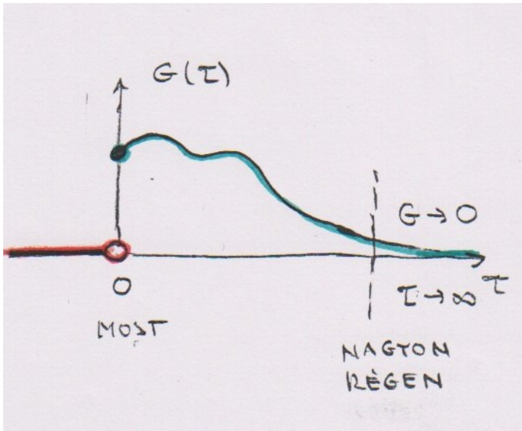
10.ábra

Ez azt fejezi ki, hogy a válaszfüggvénynek a pillanatnyi „t” időpontbeli értékét a gerjesztésnek csak ezen aktuális „t” időpont előtti t' időpontokban felvett értékei befolyásolják. Azaz az ok mindig megelőzi az okozatot. Ezt nevezhetnénk amolyan „naptári” szemléletnek (hétköznapi példaként „12.30 perckor ez és ez történt, aminek következtében most …”). Lehet alkalmazni egy „visszanéző” szemléletet is. Azaz a „t” időpillanattól visszafelé tekintve adjuk meg a kauzalitás feltételét. Ezt matematikailag a $\tau=t-t'$ változócserével érjük el. Ahol τ az aktuális „t” időponttól számított múltbeli időpont (pl „Két perccel ezelőtt az történt, hogy …és ezért most…”)
Azaz írhatjuk, hogy

$$x(t)=\int_{0}^{\infty} R_f(\tau)f(t-\tau)d\tau$$



11.ábra



12.ábra

Mindezek amiket elmondtunk egy alapvető tapasztalati tény matematikai megfogalmazásai. Nevezetesen, annak, hogy a **jövő** semmiféleképpen nem befolyásolja a **jelen** történéseit. Minden ami

most van az a **múlt**ban lezajlott események folyománya. Ezért aztán tapasztalati tényeken alapuló hipotézisként kimondjuk, hogy $R_f(\tau)$ függvénynek olyannak kell lennie, hogy.

$$R_f(\tau)\begin{cases}=0 & \text{ha} \quad \mathrm{t} \le 0 \\ \neq 0 & \text{ha} \quad t>0\end{cases}$$

Továbbá azt is tapasztaljuk, hogy minél korábban történt egy esemény annál kisebb a hatása a mára. Azaz

$$\lim_{\tau\to\infty} R_f(\tau)=0$$

Látható tehát, hogy a lineáris rendszer viselkedését t a $R_f(\tau)$ rendszerjellemző függvény írja le.
Ez eddigiek azt sugallják, hogy ahányféle $f(t)$ gerjesztés létezik, annyiféle rendszerjellemző $R_f(\tau)$ függvény írható fel. Ez azt jelentené, hogy mivel végtelen sokféle (sőt a kontinuum végtelennél is több) gerjesztés létezhet, ezért a rendszert csak végtelen sok $R_f(\tau)$ függvénnyel tudjuk jellemezni. A fizikai érzékünk azt súgja, hogy (legalább is lineáris rendszerek esetén) ez nincsen így. Ugyanis írjuk fel a linearitási tulajdonságot a rendszerre

Ha $\qquad x_1(t)\to f_1(t)$ és

$\qquad\qquad x_2(t)\to f_2(t)$,

----

akkor $\qquad [a_1\cdot x_1(t)+a_2\cdot x_2(t)]\to[a_1\cdot f_1(t)+a_2\cdot f_2(t)]$.

Ez a mi esetünkben akkor teljesül, ha csak egy rendszert jellemző $R(\tau)$ van, hiszen ekkor valóban igaz, hogy

$$a_1\cdot x_1(t)+a_2\cdot x_2(t)=\int_{-\infty}^{t} R(t-t')\cdot[a_1\cdot f_1(t')+a_2\cdot f_2(t')]dt'$$

vagy

$$a_1\cdot x_1(t)+a_2\cdot x_2(t)=\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cdot[a_1\cdot f_1(t-\tau)+a_2\cdot f_2(t-\tau)]d\tau$$

Természetesen az lehetséges, hogy ezt az egyetlen rendszerjellemző $R(\tau)$-t másféle alakúvá transzformáljuk. De ez már nem nyújt több információt . A kérdés mármost az, hogy tudunk-e találni valamilyen (univerzális) rendszerjellemző $R(\tau)$-(ke)t. Olyanokat, amelyeknek az ismeretében a rendszerre adott, tetszőleges gerjesztés hatására kialakuló válaszfüggvény előre kiszámolható. Az ember úgy érzi, hogy ilyennek lennie kell.

A kitűzött feladatunkhoz „tisztán matematikai” eszközökkel is eljuthatnánk. Most azonban (fizikusok lévén) egy heurisztikus utat fogunk követni. Ennek az az előnye, hogy lépéseinket világos fizikai okok motiválják. Így a végeredmény fizikusi szemlélete segít a későbbi (nem mechanikai) alkalmazásokban.

Konkrét példánk tehát a csillapított harmonikus oszcillátor. Ez az a lineáris mechanikai rendszer, amelyre különböző $F(t)$ gerjesztő erővel hatunk és keressük az ennek hatására kialakuló $x(t)$ mozgást. Gyakorlati jelentősége miatt az **alulcsillapított oszcillátorral** foglakozunk.

A csillapított oszcillátor mozgásegyenlete a szokásos átírással

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0{}^2x=0$$

Alulcsillapított esetben az általános megoldás ismeretes

$$x(t) = a \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi)$$

A két szabad paraméter $\{a, \varphi\}$. Legyen a kezdeti feltétel a következő

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

Azaz

$$x(0) = a \cdot \sin(\varphi) = 0$$

Az „a” nyílván nem lehet zérus, mert akkor az $x(t) \equiv 0$ „megoldás” adódik, ami fizikailag érdektelen. Marad tehát a $\varphi = 0$ választás és ezért

$$x(t) = a \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)$$

Ekkor a sebességre azt kapjuk, hogy

$$\dot{x}(t) = a \cdot e^{-\alpha t} \cdot (-\alpha \sin \omega_\alpha t + \omega_\alpha \cos \omega_\alpha t)$$

A kezdeti feltétel miatt

$$\dot{x}(0) = a \cdot \omega_\alpha = v_0$$

A keresett teljes megoldás tehát

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t)$$

Mint már utaltunk rá, eddig (és most is) a kezdeti feltételek kinematikai előírások voltak. Semmiféle dinamikát nem kötöttünk hozzá. Most változtassunk ezen és nézzük meg, hogy milyen erőhatásokkal lehetne előidézni az iménti kezdeti feltételeket. Nyilvánvaló, hogy a magára hagyott oszcillátorunk egyensúlyi állapota a nyugalom, azaz

$$x(t) \equiv 0$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x(t < 0) = 0 \quad \text{és így} \quad x(-0) = 0$$

$$\dot{x}(t < 0) = 0 \quad \text{és így} \quad \dot{x}(-0) = 0$$

Történjék egy erőhatás a t=0 időpillanatban, amelynek hatására az oszcillátor kezdeti feltételeknek megfelelő állapotba kerül. Azaz (kissé módosítva)

$$x(+0) = 0$$

$$\dot{x}(+0) = v_0$$

Vajon mi történhetett a t=0 ban? A válasz triviális, ha végiggondoljuk a következőket. A tömegpont impulzusa hirtelen megváltozott

$$p(-0) = 0$$

$$p(+0) = p_0 = m v_0$$

Azt tudjuk Newton/2 alapján, hogy

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(t) \quad \text{és így}$$

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t1}^{t2} \vec{F}(t)dt$$

Az egyenlet jobboldalán lévő integrál neve „erőimpulzus”.
Alkalmazzuk a fenti eredményt a mostani esetre. Kiindulásul kissé pontosítsuk a határfeltételünket. Azaz legyen

$$x(-0) = 0$$

$$\dot{x}(-0) = 0$$

és

$$x(+\Delta t) = 0$$

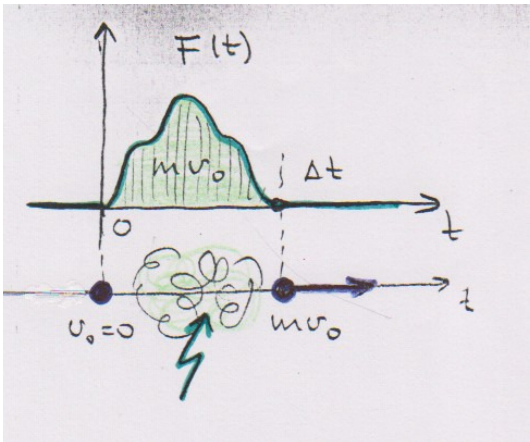
$$\dot{x}(+\Delta t) = v_0$$

Az előzőekből tudjuk, hogy a $(0, \Delta t)$ időtartományban az oszcillátorra egy valamilye $F(t)$ gerjesztő erőnek kellett hatnia, azaz

$$F(t)=\begin{cases} 0 & \text{ha } \; t\le 0 \; \text{ és } \; t\ge \Delta t \\ F(t) & \text{ha } \; 0<t<\Delta t \end{cases}$$

Amelyre teljesül, hogy

$$\int_0^{\Delta t} F(t)dt = mv_0$$



13. ábra

Az eredeti problémához akkor jutunk, ha $\Delta t \to 0$ esetén *F(t)*-t úgy változtatjuk, hogy az integrálja mindvégig ugyanaz az mv_0 maradjon.

Azaz

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_0^{\Delta t} F(t)dt = mv_0$$

Nyílván való, hogy a „hagyományos" függvények között nincsen olyan $F(t)$, amelyik eleget tenne a szóban forgó határértéknek. Hiszen ekkor egy „nulla mértékű" tartományon vett integrállal lesz dolgunk. Ilyet pedig a klasszikus analízis nem ismer. Tudunk azonban konstruálni ilyen *F(t)*-t.

Ennek a matematikai útja a következő.

Legyen

$$D_a(t)=\frac{1}{a}\cdot D\left(\frac{t}{a}\right)=\begin{cases} =0 & \text{ha } \; t\le 0 \; \text{ és } \; t\ge a \\ \ne 0 & \text{ha } \; 0<t<a \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} D_a(t)dt=1$$

Azt mondjuk, hogy $D_a(t)$ egy „véges tartójú" függvény. Könnyen belátható, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_a(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\cdot D\left(\frac{t}{a}\right)\cdot dt=\int_{-\infty}^{+\infty} D\left(\frac{t}{a}\right)\cdot d\left(\frac{t}{a}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} D(t')\cdot dt'=1$$

Azaz az integrál értéke független az „*a*" paramétertől. Geometriai szemlélettel szólva „a széltében való összenyomás és a hosszában való megnyújtás" a területet állandónak hagyja.

Akkor kapunk a mi feladatunkban is használható matematikai formát, ha bevezetjük a fenti $D_a(t)$ nek az „*a→0*" határértékét, azaz legyen

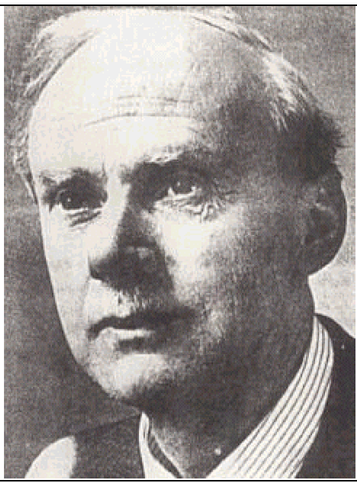
$$\delta(t)\equiv \lim_{a\to 0} D_a(t)$$

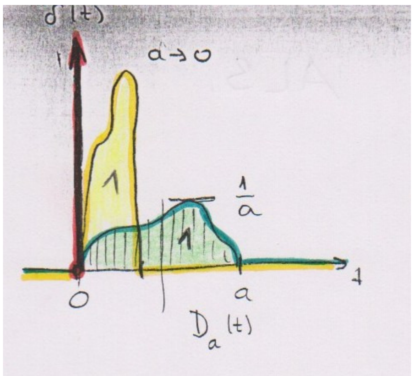
Ennek a neve „Dirac delta". Csakhogy ez a „határérték" nem létezik! Azaz olyan „valami", ami nem tartozik a klasszikus analízis által vizsgálható „függvények" halmazába. Hiszen a „*t=0*" pontban az értéke „∞", ami a „klasszikus analízisben" értelmezhetetlen. Tehát nem tekinthető „hagyományos" függvénynek. De felfoghatjuk a függvényfogalom olyan általánosításának, amely a „hagyományos" módon nem vizsgálható ugyan, de a saját, jól definiált „kezelési utasításai" vannak. Ezeket a „klasszikus analízis" fogalomtárának megfelelő általánosításával kapjuk meg. úm. deriválás, integrálás, stb.… Ezt az általánosított függvényt „disztribúciónak" hívják.

MEGJEGYZÉS: A Disztribúcióelmélet megalkotója Neumann János volt. Aki elolvasván P.A.M. Dirac „The Principles of Quantum Mechanics" (1930) könyvét elégedetlen volt annak „matematikai korrektségével". Ebben a könyvben használta Dirac a fenti $\delta(t)$ „függvényt" először. Ezért ragadt rá a későbbiekben „Dirac delta" név. Maga Dirac is óvatosan fogalmazott:

"Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise."

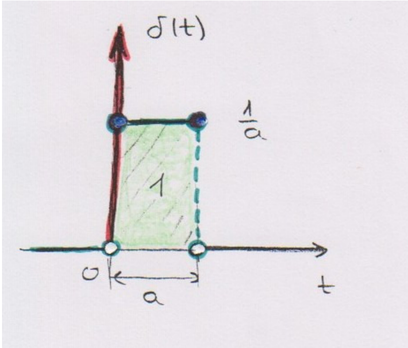
Jóllehet a kvantummechanikai számításokban „minden jól kijött", a „függvényként" való kezelése zavarta a matematikai képességeiről méltán híres Neumann-t. Az ő ez irányú matematikai vizsgálódásai indították el a „disztribúció elmélet"-nek nevezett matematikai területet.

	
Paul Adrien Maurice DIRAC (1902-1984) Fizikai **Nobel** Díj **1933** (megosztva Erwin Schrodinger-rel)	**NEUMANN JÁNOS** (1903 – 1957)



14.ábra

Mivel a fenti eljárás független a *D(t)* konkrét matematikai alakjától ezért célszerű a „legegyszerűbbet", az „*a*" szélességű és „*1/a*' magasságú (egységnyi területű) „négyszög jelet" elképzelni. Az ebből képzett Dirac deltát egy „tüskével" szoktuk szemléltetni.



15. ábra

Látható tehát, hogy a Dirac delta mértékegysége $[\delta(\tau)] = \frac{1}{\sec}$.

A Dirac delta fogalmával sikerült az „$x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=v_0$" kinematikai kezdeti feltételt dinamikai gerjesztéssé alakítani. Hiszen ha egy nyugalomba lévő oszcillátorra { $x(t<0)=0$ és $\dot{x}(t<0)=0$ },a „*t=0*" időpillanatban egy megfelelő erősségű Dirac-delta erővel hatunk, akkor az oszcillátor a { $x(+0)=0$ és $\dot{x}(+0)=v_0$ } kezdeti feltételeknek megfelelő mozgást fogja végezni.

Ennek alapján az oszcillátor dinamikája a következő

Kezdetben az oszcillátor nyugalomban van, azaz energiamentes

$$x(t<0)=0$$
$$\dot{x}(t<0)=0$$

és ezért a kezdeti feltételek így írhatók

$$x(-0)=0$$
$$\dot{x}(-0)=0$$

A rendszerre egy $F_\delta(t)=mv_0\cdot\delta(t)$ Dirac-delta gerjesztést adunk. Látható, hogy a $\delta(t)$ mértékegysége $[\delta(t)]=1/s$ kell, hogy legyen.

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+Dx=mv_0\cdot\delta(t)$$
$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0{}^2x=v_0\cdot\delta(t)$$

Ennek hatására az oszcillátor mozgását a jól ismert (mert már megoldott) függvény adja meg:

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_\alpha}\cdot e^{-\alpha t}\sin(\omega_\alpha t)$$
$$\omega_\alpha=\sqrt{\omega_0{}^2-\alpha^2}$$

Ez valóban kielégíti a kirótt („kissé" módosított) kezdeti feltételeket

$x(-0)=0$ helyett $x(+0)=0$

$\dot{x}(-0)=v_0$ helyett $\dot{x}(+0)=v_0$

Ez a módosítás valóban csekély, fizikai szempontból észrevehetetlen. Inkább a matematikai precizitásunkat próbálja kielégíteni.
Könnyen „megszabadulhatunk" a kezdeti feltételből adódott „v_0" értéktől is.

$$\left(\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0{}^2x\right)\cdot\frac{1}{v_0}=\delta(t)$$

Ekkor a válaszfüggvényt „$G(t)$"-vel szokás jelölni, azaz

$$G(t) \equiv \frac{x(t)}{v_0} \ .$$

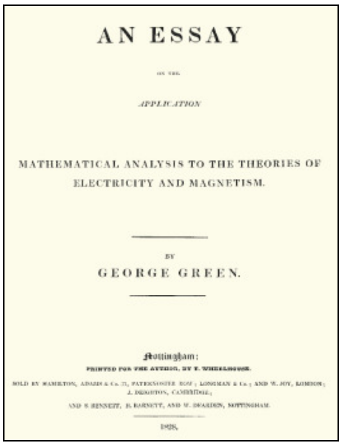
Látható, hogy „*G(t)*” mértékegysége $[G] = 1 \cdot s$ és a neve „**Green függvény**” .
Ezzel a lineáris rendszerünkre azt kaptuk, hogy

$$\ddot{G} + 2\alpha\dot{G} + {\omega_0}^2 G = \delta(t)$$

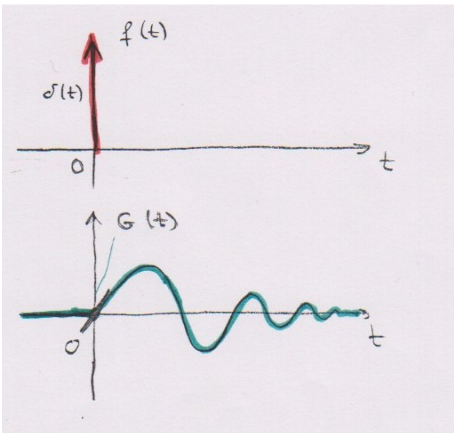
és

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t) & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases}$$

A Green függvény tehát az oszcillátornak a $\delta(t)$ gerjesztésre adott válaszfüggvénye.

	 AN ESSAY ON THE APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM. BY GEORGE GREEN. Nottingham:
George GREEN (1793 – 1841)	An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism (Green, 1828).

Ezt a definíciót általánosan is használjuk. Azaz :
”Egy lineáris rendszernek a Dirac-delta gerjesztésre adott válasza a rendszer Green-függvénye.”



16. ábra

MEGJEGYZÉS: A mérnöki tudományokban a Green függvény helyett a „súlyfüggvény” elnevezést használják.

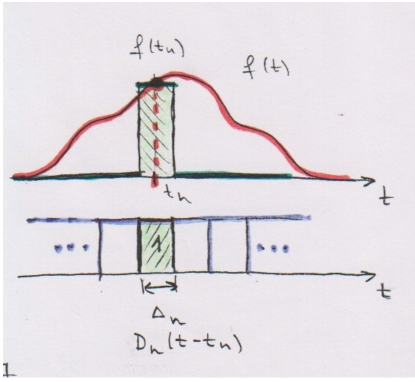
A következőkben megmutatjuk, hogy a Green-függvény valóban egy „rendszerjellemző” függvény. Pontosan olyan, mint amilyenre intuitív meggondolásokkal vártunk.

Tekintsünk egy tetszőleges $F(t)$ erőhatást, amelyik egy kezdetben nyugalomban lévő oszcillátorra (lineáris rendszerre) hat. Megmutatjuk, hogy ez Dirac-delták összegével egyértelműen előállítható.

Tekintsük tehát az $f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}$ („fajlagos”) gerjesztést. Osszuk fel az időtengelyt „Δ_n” hosszú időtartományokra. Legyen az egyes tartományok egy belső pontja t_n. Minden időtartományra illesszünk egy „négyszög jelet”. Válasszuk meg a Δ_n és t_n értékeket úgy, hogy igaz legyen az, hogy

$\cdot D_\Delta(t - t_n) \cdot \Delta_n = 1$ minden „n” re.

Ezzel az $f(t)$ gerjesztés jó közelítéssel előállítható az imént definiált (egymással nem átfedő) négyszögjelek összegével a következőképpen



17.ábra

$$f(t) \approx \sum_n f(t_n) \cdot D_\Delta(t - t_n) \cdot \Delta_n$$

És ezért

$$f(t) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum_n f(t_n) \cdot D_\Delta(t - t_n) \cdot \Delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t - t')dt'$$

Ami valóban teljesül. Az integrálási határokat azért választhattuk $\pm\infty$ -nek, mert azok az időintervallumok, amelyekben *f(t)=0* úgy sem ad járulékot az integrál értékéhez.
Mivel a rendszer lineáris és tudjuk, hogy egy t'-időpontban fellépő Dirac-delta gerjesztésre a válasz a következő

$$f(t') \cdot \delta(t - t') \rightarrow f(t') \cdot G(t - t')$$

Ezért aztán az rendszernek az $f(t)$ gerjesztésre adott válaszfüggvénye nyílván:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \cdot G(t - t')dt'$$

Ezzel a feladatunkat megoldottuk. Azaz valóban a Green- függvény egy rendszerjellemző függvény, mert ismeretében egy tetszőleges gerjesztésre adott válasz kiszámítható. A fenti integrál tulajdonképpen két függvényt „szoroz össze” egy speciális utasítással. Ennek **a neve „konvolució”.**

Az általánosított deriválás és a „lépcsöfüggvény”

Említettük, hogy a Dirac delta a függvényfogalom egyfajta általánosítása. Nevezetesen egy $f(t)$ függvényhez hozzárendeli az $f(0)$-t és a következő definíciós integrállal:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t')dt'$$

És ezért általánosan

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t - t')dt'$$

Megmutattuk, hogy definíció szerint

$$\delta(t) \equiv \lim_{a\to 0} D_a(t) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\cdot D\left(\frac{t}{a}\right)$$

A limesz független a „véges tartójú” $D_a(t)$ alakjától. Ezért a legegyszerűbb ha egy egységnyi területű „négyszög jelet” képzelünk el. Az ebből a függvényből (határátmenettel) képzett Dirac delta ugyanazokkal az általános matematikai tulajdonságokkal rendelkezik, mint a „matematikai hatásain” keresztül definiált „absztakt” „Dirac delta”.

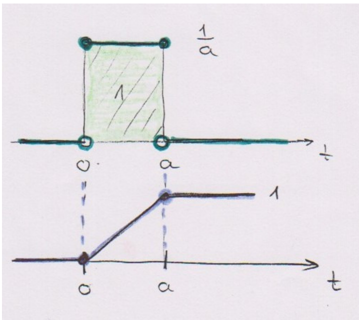
Tekintsük tehát a

$$D_a(t)\begin{cases} = 0 & \text{ha} \quad t < 0 \quad \text{és} \quad t > a \\ = \dfrac{1}{a} & \text{ha} \quad 0 \le t \le a \end{cases}$$ egységnyi területű négyszögjelet.

Képezzük ennek az integrálját, azaz:

$$\theta_a(t) = \int_{-\infty}^{t} D_a(t)dt$$

Mivel a $D_a(t)$ mindenhol „jól viselkedő” függvény, azt kapjuk, hogy



18.ábra

$$\theta_a(t)\begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 0 \\ \dfrac{t}{a} & \text{ha} \quad 0 \le t \le a \\ 1 & \text{ha} \quad a < t \end{cases}$$

Vegyük az így kapott $\theta_a(t)$ függvény határértékét, azaz

$$\theta(t) = \lim_{a\to 0}\theta_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 0 \\ 1 & \text{ha} \quad 0 < t \end{cases} \quad \text{és}$$

$\theta(0) =$ „**nem értelmezhető**” !

A $\theta(t)$ neve „egységugrás”.
Definíció szerűen írható tehát, hogy:

$$\theta(t) \equiv \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' .$$

Ekkor viszont, megtartva a „deriválás-integrálás inverz műveletek” kapcsolatot definíció szerűen írhatjuk, hogy

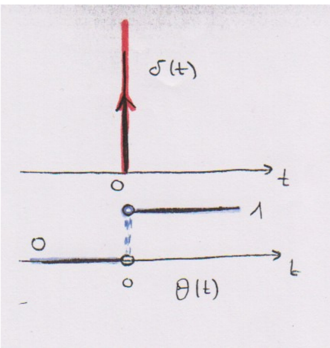
$$\frac{d}{dt}\theta(t) \equiv \delta(t)$$

Azaz

a Dirac-delta „általánosított integrálja” az egységugrás és
az egységugrás „általánosított deriváltja” a Dirac-delta.

Az „általánosított deriválás/integrálás” művelet jelölésére megtartottuk a „hagyományos” szimbólumokat. Ez nem lehet zavaró, hiszen mindkét esetben megadtuk a „definíciókat”

MEGJEGYZÉS: Az „általánosított deriválás és integrálás” megfelel a „disztribúcióértelemben vett” deriválásnak és integrálásnak.



19/A.ábra

Az ilyen módon „általánosított” műveleteket ugyanúgy tudjuk használni az összetett deriválási/integrálási szabályoknál, mint közönséges megfelelőit. Ez nyílvánvaló, ha arra gondolunk, hogy megtehetnénk azt is, hogy először $D_a(t)$ és $\theta_a(t)$ függvényekkel elvégezzük a szokásos műveletek, majd utána „ $a \to 0$ ” határátmentet hajtunk végre, amelynek eredményeként megjelenik a $\theta(t)$ lépcsőfüggvény és a $\delta(t)$ disztribúció.

A lépcsőfüggvény és az átmeneti függvény

Az előző részt azzal zártuk, hogy az „általánosított deriválás/integrálás”-ra ugyanazok az összetett műveleti szabályok érvényesek, mint amiket a klasszikus analízisben használunk.
Nézzünk most erre egy hasznos példát.

Láttuk, hogy a Dirac-delta és a Green-f üggvény definíciója miatt szimultán érvényes a következő két összefüggés:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t-t')dt' \qquad \text{(D)}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\cdot G(t-t')dt' \qquad \text{(G)}$$

Tudjuk, hogy az általánosított deriválás bevezetésével

$$\frac{d}{d\tau}\theta(\tau) \equiv \delta(\tau)$$

És ezért

$$\frac{d}{dt'}\theta(t-t') \equiv -\delta(t-t')$$

Azaz

$$f(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\frac{d\theta(t-t')}{dt'}dt'$$

Hajtsunk végre egy parciális integrálást

$$f(t) = \left[-f(t')\theta(t-t')\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(t')}{dt'}\theta(t-t')dt'$$

Mivel $f(-\infty) = 0$ és $\theta(-[+\infty])=0$, ezért az első tag kiesik. Így marad az, hogy:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(t')}{dt'}\theta(t-t')dt' \qquad \text{IL...}$$

Tehát a gerjesztés előállítható egységugrások szuperpozíciójával. Ezért azt várjuk, hogy a $\theta(t)$ „vizsgáló gerjesztésre" adott $H(t)$ válaszfüggvény ugyanolyan rendszerjellemző függvény lesz, mint a $\delta(t)$ Dirac deltára válaszul adott Green függvény.

Így a rendszer linearitása miatt, az *f(t)*-re adott válaszfüggvény nyílván a következő lesz

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(t')}{dt'}H(t-t')dt'$$

Itt is végrehajtva a parciális integrálást

$$x(t)=\left[f(t')H(t-t')\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')\frac{dH(t-t')}{dt'}dt'$$

De az első tag most is nulla. Ezért

$$x(t)=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')\frac{dH(t-t')}{dt'}dt'$$

Ugyanakkor tudjuk az *f(t)*-ra adott válaszfüggvény most

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')\cdot G(t-t')dt'$$

A kettő összehasonlításából kapjuk, hogy

$$G(t-t')=-\frac{dH(t-t')}{dt'}$$

Azaz

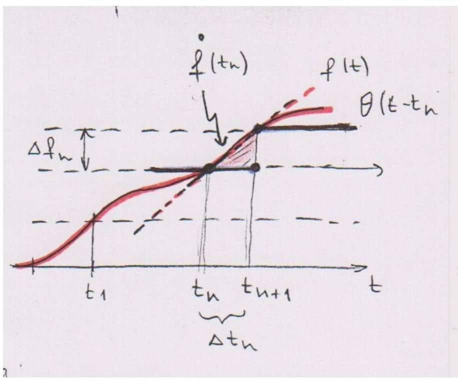
$$G(\tau)=\frac{dH(\tau)}{d\tau} \qquad \text{ID}$$

Szavakban: „Az egységugrásra adott válaszfüggvény deriváltja a Green függvény."

Az iménti eredményeinket az „általánosított deriválás" segítségével kaptuk meg. Joggal merülhet fel a kérdés, hogy vajon jók-e ezek az eredmények?

Először az (IL) összefüggést igazoljuk.

Tekintsünk egy fizikailag jól viselkedő (azaz kellően sima és szakadásmentes) *f(t)* gerjesztő függvényt. Osszuk fel a „*t*" tengelyt „t_n" osztópontokkal kis Δt_n időtartományokra. Ekkor egy tetszőleges „*t*" időponthoz tartozó *f(t)* függvényérték a következő képpen kapható meg.



19-.ábra

$$f(t)\cong\sum_{n}^{N}\dot{f}(t_n)\cdot\Delta t_n\cdot\theta(t-t_{n+1}),$$

ahol az időderiváltra most is bevezettük a jól ismert jelölést

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$$

Hajtsuk végre az integrálásnál szokásos határátmeneteket, azaz

$$f(t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \sum_{n}^{N} \{\ldots\} \cdot \Delta t_n = \int_{-\infty}^{t} \dot{f}(t')\theta(t-t')dt'$$

Mivel tudjuk, hogy $\theta(t-t') = 0$ ha $t' > t$, ezért az integrálás felső határára $(+\infty)$ írható, azaz

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{f}(t') \cdot \theta(t-t')dt'$$

Az imént kapott összefüggésünk pedig pontosan megegyezik IL –el, amelyet az „általánosított deriválás" felhasználásával kaptunk.

Most nézzük meg, hogy egy konkrét esetben (nevezetesen az alulcsillapított oszcillátor esetén) teljesül-e a

$$G(\tau) = \frac{dH(\tau)}{d\tau} \qquad \text{ID}$$

összefüggés.

A Green függvény ebben az esetben már ismert

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t) & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases}$$

Határozzuk meg $H(t)$-t, amelyik a $\theta(t)$ egységugrás gerjesztésre adott válaszfüggvény. Ezt „átmeneti függvénynek" is szoktuk nevezni.

Adott tehát egy nyugalomban lévő oszcillátor, amelyre a $t > 0$ időtartományban rákapcsolunk egy F_0 állandó erőhatást. Azaz

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F_0 \cdot \theta(t)$$

A tömeggel való osztás és a szokásos jelölések bevezetése után

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = f_0 \cdot \theta(t)$$

egyenlethez jutunk. Mivel az erőhatás előtt az oszcillátor nyugalomban volt, ezért a kezdeti feltételek

$$x(-0) = 0$$
$$\dot{x}(-0) = 0$$

A feladat „átfogalmazható" a következő képpen. Keressük meg a

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = f_0$$

mozgás egyenlet megoldását a $t \geq 0$ időtartományra a

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

kezdeti feltételek esetén.

Most már ismerős terepen mozgunk. Ez egy inhomogén differenciál egyenlet, amelynek általános megoldása

$$x_{IH}(t) = x_H(t) + x_{IHP}(t) \qquad \text{IH}$$

Ahol a homogén egyenlet általános megoldása már ismert

$$x_H(t) = a \cdot \exp\{-\alpha t\} \cdot \sin(\omega_\alpha t + \varphi) \qquad (t \geq 0)$$

A későbbi számolások egyszerűbbek lesznek, ha az $\{a,\varphi\}$ ismeretlen paraméterek helyett másik kettőt, azaz $\{a,b\}$-t használunk. (Természetesen a két „a" nem ugyanaz!)
Legyen tehát

$$x_H(t) = \exp\{-\alpha t\}\cdot[a\sin(\omega_\alpha t) + b\cos(\omega_\alpha t)]$$

$\{a,b\}$-t a gerjesztett oszcillátorra kirótt kezdeti feltételek teljesülése határozza majd meg.
Az inhomogén egyenletnek egy konkrét megoldása triviálisan adódik

$$x_{IHP} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \qquad (t \ge 0)$$

Tehát kaptuk, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x_{IH}(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} + \exp\{-\alpha t\}\cdot[a\sin(\omega_\alpha t) + b\cos(\omega_\alpha t)]$$

A következőkben az egyszerűség végett elhagyjuk az „*IH*" indexet , azaz

$$x(t) \equiv x_{IH}(t)$$

A kezdeti feltételek szerint egyrészt

$$x(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} + b = 0,$$

azaz

$$b = -\frac{f_0}{\omega_0^2} \qquad \text{(KFb)}$$

Másrészt meg kell határozni az $\dot{x}(t)$ sebességfüggvényt is.
Erre kapjuk, hogy

$$\dot{x}(t) = +\cdot\exp\{-\alpha t\}\cdot[-\alpha\{a\sin(\omega_\alpha t) + b\cos(\omega_\alpha t)\} + \omega_\alpha\{a\cos(\omega_\alpha t) - b\sin(\omega_\alpha t)\}]$$

Ami átrendezés után

$$\dot{x}(t) = +\cdot\exp\{-\alpha t\}\cdot[\{\omega_\alpha a - \alpha b\}\cos(\omega_\alpha t) - \{\omega_\alpha b + \alpha a\}\sin(\omega_\alpha t)]$$

A kezdeti feltétel miatt pedig

$$\dot{x}(0) = \omega_\alpha a - \alpha b = 0$$

Azaz

$$a = \frac{\alpha}{\omega_\alpha} b$$

Ezt és a (KFb) beírva az *x(t)*-be kapjuk a keresett mozgásfüggvényt

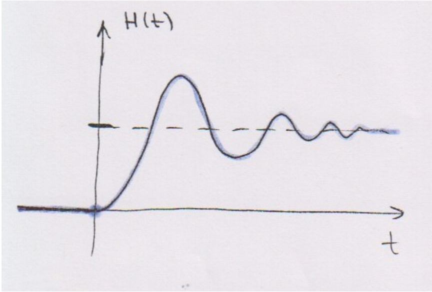
$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\alpha t}\cdot\left\{\cos(\omega_\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha t) + \right\}\right]$$

Mivel pedig a definíciónk szerint

$$x(t) = f_0 H(t),$$

ezért a *H(t)* átmeneti függvényre azt kapjuk, hogy:

$$H(t) = \frac{1}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\alpha t}\cdot\left\{\cos(\omega_\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha t) + \right\}\right]$$



20.ábra

Látható, hogy

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{D}$$

Azaz az oszcillálás lecsengése után a „rugó” várt statikus megnyúlását kaptuk.

Ezek után már ellenőrizhetjük a

$$G(\tau) = \frac{dH(\tau)}{d\tau} \qquad \text{ID}$$

Képezzük a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\omega_0^2} e^{-\alpha t} \cdot \left[\alpha\cos(\omega_\alpha t) + \frac{\alpha^2}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha t) - \alpha\cos(\omega_\alpha t) + \omega_\alpha \sin(\omega_\alpha t) \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2} e^{-\alpha t} \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\omega_\alpha} + \omega_\alpha \right] \sin(\omega_\alpha t)$$

Mivel pedig tudjuk, hogy definíció szerint $\omega_\alpha \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, ezért

$$\left[\frac{\alpha^2}{\omega_\alpha} + \omega_\alpha \right] = \left[\frac{\alpha^2 + \omega_\alpha^2}{\omega_\alpha} \right] = \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right]$$

Ezzel adódik, hogy

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\omega_\alpha} e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_\alpha t) = G(t), \quad \text{ha} \quad t > 0$$

Azaz a várt eredményt kaptuk.

Az iménti számolás (ha nem is volt egy korrekt bizonyítás, de) mindenesetre megnyugtató hiszen egy konkrét példán keresztül igazolta állításunkat. Azaz az „általánosított deriválás és integrálás” fizikailag korrekt eredményeket szolgáltató matematikai műveletek. Mint az látható volt ezeknek igen szemléletes fizikai jelentést tudtunk tulajdonítani. Így sikerült elkerülni a „disztribúció elméletbe” való elmélyülésünket.

Természetesen ha a fizikai feladatunkban mélyebb matematikai részletekre van szükség, akkor a disztribúcióelmélet „finomságai” nem kerülhetők ki. De ezzel most nem kell törődnünk, mert a „turpisság” úgyis mindig kiderül a konkrét fizikai probléma kapcsán.

Periodikus függvények Fourier-analízise

A lineáris rendszerek viselkedését eddig a *G(t)* és *H(t)* függvényekkel, azaz a Dirac-delta és az egységugrás gerjesztésre adott válaszfüggvényekkel jellemeztük. Ezek ún. „időtartománybeli” vizsgálódások voltak. Könnyen belátható, hogy még viszonylag egyszerű matematikai formába felírható $f(t)$ gerjesztések esetén is a keresett $x(t)$ válaszfüggvény kiszámítása fáradságos integrálási feladat.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\cdot G(t-t')dt'$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t')}{dt'}\cdot H(t-t')dt'$$

Ez még a példaként vizsgált „alulcsillapított oszcillátorra” is igaz, nem beszélve esetleg bonyolultabb rendszerekről, ahol maga a Green függvény (ill. az átmeneti függvény) is sokkal komplikáltabb, mint ami most volt.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy alkalmasan megválasztott „integrál transzformációkkal” a „*t*” időparaméter helyett új „változóra” térhetünk át. Ennek az alkalmas megválasztása esetén a fizikai feladatainknak a megoldása matematikailag sokkal egyszerűbbé válik. A matematikai nehézségeket mintegy a „transzformáció” műveletébe sűrítjük. Ez látszólag nem igazán előny, hiszen a fizikai feladat megoldása során erre a lépésre (előbb vagy utóbb de) mindenképpen sor kell, hogy kerüljön. A lényeg azonban az, hogyha megtanulunk fizikailag gondolkozni az „új változó” nyelvén, akkor a feladat érdemi részét ezen a „nyelven” oldhatjuk meg. A Fizika számunkra itt jelenik meg. Az oda-vissza transzformáció pusztán egy „matematikai műveletté” (bár kétségtelenül, igen fontos műveletté) „degradálódik”.

A következőkben a Fourier transzformációról lesz szó.

Ezek a lineáris rendszerek dinamikai tulajdonságainak feltárásánál használt igen eredményes matematikai eszközök. Mi ismét a „fizikai megközelítést választjuk, azaz magára a fizika feladatra koncentrálunk és csak annyi matematikai precizitást követelünk meg, amennyi fizikailag feltétlenül szükséges.

Bevezetésül ismételjük át azt, amit az eddigi tanulmányaink során a „rezgések spektrális felbontásáról” hallottunk. A legismertebb gyakorlati példa erre a különböző hangszerek által keltett hangok analízise. Azaz annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi a fizikai oka annak, hogy pl. ugyanaz a normál „á” hang a minden hangszeren másképpen hallatszik. Azaz különbséget tudunk tenni mondjuk a hegedű vagy az oboa hangja között.

A mechanikában (is) gyakran előfordulnak periodikusan ismétlődő jelenségek. Egy *x(t)* függvény akkor periodikus , ha a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$x(t+kT)=x(t) \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

A „*T*” neve a periódusidő.

Minden, tetszőleges *x(t)* függvény egyértelműen felbontható páros és páratlan függvények összegére, azaz

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

Ahol

$x_1(-t)=-x_1(t)$ páratlan függvény és

$x_2(-t)=x_2(t)$ páros függvény.

Ennek alapján a felbontás nyilvánvalóan a következő

$$x_1(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

és

$$x_2(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

Tudjuk azt a mechanikából, hogy egy egy szabadságfokú (mechanikai) rendszer stabil egyensúlyi állapota a $V(\xi)$ potenciális energiájának a minimumánál $(\xi=\xi_0)$-nál van, azaz

$$\left[\frac{dV}{d\xi}\right]_{\xi 0} = 0$$

Ha sorba fejtjük a $V(\xi)$-t a „ξ_0” egyensúlyi pont körül, akkor kapjuk, hogy

$$V(\xi) = V(\xi_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\right]_{\xi 0}(\xi - \xi_0)^2 + \dots$$

Ha $V(\xi_0) = 0$ választással élünk és $x \equiv \xi - \xi_0$ új változót vezetünk be, akkor a potenciális energiára (csak az első el nem tűnő tagot megtartva) adódik, hogy

$$V(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dx^2}\right]_0 x^2 \equiv \frac{1}{2}Dx^2$$

Ez pedig a harmonikus oszcillátor potenciális energiája. Ezért a fizikailag megvalósuló legegyszerűbb (univerzális) periodikus mozgás a harmonikus rezgőmozgás lesz, azaz

$$x(t) = a\sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

ahol a periódus idő

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Az $x(t)$ -ben szereplő „sin” szögfüggvény felbontásával kapjuk, hogy

$$x(t) = a[\cos\varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) + \sin\varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)] \equiv c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t),$$

Azaz $x(t)$ valóban felbomlott egy páratlan és egy páros függvény összegére, hiszen

$$\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$$
$$\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$$

Azt is tudjuk, hogy egy körmozgás (x, y) koordinátáit geometriai úton a „sin” és a „cos” fogalmával lehet kifejezni. Ebből a geometriai kapcsolatból ered az „ω” neve, azaz a „körfrekvencia” is. Nem véletlen tehát az, hogy a periodikus mozgások leggyakoribb formáját „megnevesítettük” ezek a „sin” és „cos” függvények.

Az előtanulmányainkból tudjuk, hogy minden, tetszőleges, „T” periódusidejű mozgásfüggvény felírható

$$x(t,T) = x_1(t,T) + x_2(t,T) \qquad \text{alakban, ahol}$$

$$x_1(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sin(k\omega t) \qquad \text{páratlan függvény és}$$

$$x_2(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \cos(k\omega t) \qquad \text{páros függvény}$$

Összevonva tehát

$$x(t,T) = \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cdot \sin(k\omega t) + b_k \cdot \cos(k\omega t)\} + \frac{b_0}{2}$$

Látható, hogy valóban

$$x(t+T,T) = x(t,T),$$

hiszen

$$\sin(k\omega[t+T]) = \sin\left(k\omega t + k\frac{2\pi}{T}T\right) = \sin(k\omega t) \text{ és}$$

ugyanígy igaz ez a „cos” függvényre is.

Mint az ismeretes a „*T*” periódusidejű függvények ilyen előállítását Fourier soroknak nevezzük. Az „ω” frekvenciájú tag neve „alapharmónikus”, a többi $\{2\omega, 3\omega, 4\omega, ..., k\omega, ..\}$ frekvenciájú tagot felharmónikusnak hívjuk.
Tehát a „*T*” periódusidejű $x(t,T)$ függvény ismert, ha megadjuk a Fourier sorának együtthatóit, azaz

$$\{a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...\} \text{ és } \{b_0, b_1, b_2, ..., b_k, ...\}$$

De fordítva is igaz! Azaz az $x(t)$ ismeretében meghatározhatók az $\{a_k, b_k\}_{k=0}^{\infty}$ együtthatók.
Ennek alapja a „sin” és a „cos” függvények között fennálló egyfajta „ortogonalitási” tulajdonság. Ezek a következők:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^T (\sin(k\omega t) \cdot \sin(n\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n \neq k \\ \pi & \text{ha} \quad n = k \end{cases} \qquad n, k = 1,2,3,...$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^T (\cos(k\omega t) \cdot \cos(n\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n \neq k \\ \pi & \text{ha} \quad n = k \end{cases} \qquad n, k = 1,2,3,...$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^T (\sin(k\omega t) \cdot \cos(n\omega t))dt = 0$$

Mindezek felhasználásával a Fourier együtthatók a következőképpen számolhatók ki:

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t,T) \cdot \sin(k\omega t)dt \qquad (k = 0,1,2,...)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t,T) \cdot \cos(k\omega t)dt \qquad (k = 0,1,2,...)$$

Láthatóan

$$a_0 = 0$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t,T)dt$$

és ezért (ahogyan azt már láttuk)

$$x(t,T) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cdot \sin(k\omega t) + b_k \cdot \cos(k\omega t)\}$$

Az eddigi ismétlésre azért volt szükség, mert ez jelenti az alapot egyfajta „általánosításra”. Ugyanis természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon egy nem periodikus $x(t)$ függvény szintén felbontható-e valamiféle összetevőkre. Azaz létezik-e nem periodikus függvények „spektrális felbontása”.

A válasz igen!

Ezt nevezzük Fourier analízisnek és a végeredményt Fourier transzformációnak.
A következőkben ezzel foglakozunk és azzal, hogy miként lehet majd az új ismereteinket a lineáris rendszerek analízisénél felhasználni. Szemléltető példaként továbbra is az „alulcsillapított harmonikus oszcillátornál” maradunk.

Nem-periódikus függvények Fourier-analízise, a Fourier transzformáció

Tekintsük az „ω” alap körfrekvenciát. Vezessünk be egy új jelölést a felharmónikusokra, azaz

$$\omega_k \equiv k \cdot \omega = k \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad \text{ahol} \quad k = 1,2,3,...$$

Két körfrekvencia között a legkisebb különbség nyilvánvalóan maga az alapharmonikus, azaz

$\Delta\omega = \Delta k \cdot \omega = \omega$, mert $k = 1,2,3,...$ és így $\Delta k = 1$

Tekintsük a „T" periódusidejű függvény jól ismert Fourier sorát

$$x(t,T) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cdot \sin(k\omega t) + b_k \cdot \cos(k\omega t)\}$$

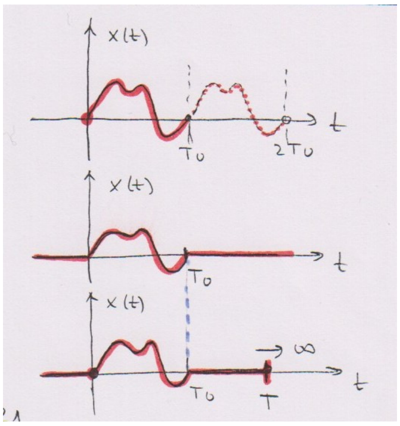
Bővítsünk minden tagban „$\omega = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$"-val.

$$x(t;T) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{A_k \cdot \sin(k\omega t) + B_k \cdot \cos(k\omega t)\} \cdot \Delta\omega$$

Ahol a következő jelöléseket vezettük be:

$$A_k = a_k \frac{T}{2\pi}$$

$$B_k = b_k \frac{T}{2\pi}$$



21.ábra

Az ábrán látható, hogy egy egyszerű „trükkel" miként tudunk csinálni egy „T_0" véges periódus idejű $x(t,T_0)$ függvényből egy $x(t)$ aperiódikus függvényt (azaz amelyik nem periódikus).
Először változtassuk meg a T_0-t $T > T_0$-ra a következő definícióval

$$x(t,T) = \begin{cases} x(t,T_0) & \text{ha} \quad 0 \le t \le T_0 \\ 0 & \text{ha} \quad T_0 < t < T \end{cases}$$

Természetesen ennek az $x(t,T)$-nek az alap harmónikusa nem $\frac{2\pi}{T_0}$, hanem $\omega' \equiv \frac{2\pi}{T}$ lesz, és így a Fourier sora:

$$x(t;T) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{A_k \cdot \sin(k\omega' t) + B_k \cdot \cos(k\omega' t)\} \cdot \Delta\omega'$$

Ha ezek után a $T \to \infty$, akkor egy aperiódikus függvényt kapunk, hiszen a „T" kitolás a „∞"-be nem változtatja meg az $x(t,T)$ függvénynek a $0 \le t \le T_0$ tartománybeli alakját. Azaz

$$x(t) \equiv \lim_{T\to\infty} x(t,T)$$

Ez a határátmenet minden nehézség nélkül megtehető.
A függvényünk Fourier sorában azonban változások történnek Ugyanis $(T \to \infty)$ esetén az alapharmonikus $\omega' \to 0$ és ezért a $\{k \cdot \omega'\}_{k=0}^{\infty}$ diszkrét halmaz folytonossá válik.. Jelöljük most ennek a folytonos körfrekvencia halmaznak tetszőleges elemét „ω"-val.
Tehát

$$\lim_{T\to\infty}[k\omega'] \equiv \omega$$

A folytonos ω miatt a lehetséges körfrekvenciák közötti különbség infinitezimális lesz, azaz

$$\lim_{T\to\infty}\left[\Delta\omega' = \frac{2\pi}{T}\right] = d\omega$$

Ezzel a $\sum_{k=1}^{\infty}\{...\}\Delta\omega'$ összegezés integrállá alakul, tehát

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x(t;T) = b_0 + \lim_{T\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{A_k\cdot\sin(k\omega' t) + B_k\cdot\cos(k\omega' t)\}\cdot\Delta\omega'$$

Elhagyva az ügy szempontjából most lényegtelen b_0 állandót, kapjuk, hogy

$$x(t) =: \int_0^{\infty}\{A(\omega)\cdot\sin(\omega t) + B(\omega)\cdot\cos(\omega t)\}d\omega$$

Ennek a neve „Fourier integrál”.
Az $\{A(\omega), B(\omega)\}$ együtthatók az ω körfrekvencia függvényei. Erre azt mondjuk, hogy az $x(t)$-nek folytonos Fourier spektruma van. Ezek kiszámítása most már automatikusan adódik.
Ugyanis tudjuk, hogy pl.

$$A_k = a_k\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{2}{T}\cdot\int_0^T x(t,T)\cdot\sin(k\omega' t)dt$$

És ezért $T\to\infty$ esetén

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} x(t)\cdot\sin(\omega t)dt \equiv \tilde{X}_S(\omega)$$

Hasonló módon adódik, hogy

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} x(t)\cdot\cos(\omega t)dt \equiv \tilde{X}_C(\omega)$$

MEGJEGYZÉS: A 21ábra alapján látható, hogy az integrálás alsó határa lehetne „$-\infty$” is hiszen az $x(t)$ $(-\infty,0)$

A későbbiek miatt már most bevezettünk két új jelölést, nevezetesen

$$\tilde{X}_S(\omega) \equiv A(\omega)$$

$$\tilde{X}_C(\omega) \equiv B(\omega)$$

Tehát egy (jól viselkedő) tetszőleges $x(t)$ Fourier integrállal előállítható. Ekkor az $x(t)$függvény ismerete ekvivalens a Fourier együtthatók megadásával és viszont, azaz

$$x(t) \leftrightarrow \{\tilde{X}_S(\omega), \tilde{X}_C(\omega)\}$$

MEGJEGYZÉS: A „jól viselkedés” triviálisan azt jelenti, hogy a fenti integrálok elvégezhetők. Nekünk azonban ennél jó lenne többet is tudni. Például azt, hogy „ránézésre” (anélkül, hogy megpróbálnánk elvégezni az integrálásokat) miként tudjuk eldönteni azt, hogy végesek-e ezek az integrálok vagy sem. Egyet már most biztosan mondhatunk. Ha az $x(t)$ „négyzetesen integrálható”, akkor a Fourier spektruma kiszámítható.
A „négyzetesen integrálhatóság” azt jelenti, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \text{véges}$$

A kérdés mármost az, hogy az iménti ismereteinket miként tudjuk hasznosítani a lineáris rendszerek dinamikai vizsgálatakor. A válasz kézenfekvő. Nyilvánvaló ugyanis, hogy minden (jól viselkedő) $f(t)$ gerjesztés előállítható Fourier (integrál vagy sor) alakban. Mivel a rendszer lineáris, ezért az $x(t)$ válaszfüggvény előre kiszámítható, ha ismerjük a rendszer válaszát az „$1\cdot\sin(\omega t)$” vagy „$1\cdot\cos(\omega t)$” gerjesztések esetén. Azaz ezek az elemi gerjesztések jó vizsgáló függvények és az erre

adott „válasz függvények” rendszerjellemző függvények lesznek. Hasonlóan, mint azt a $\delta(t)$ és a $\theta(t)$ esetében tapasztaltuk.
Azaz

$$\delta(t) \to G(t)$$
$$\theta(t) \to H(t)$$
$$\sin(\omega t) \to x_S(t,\omega)$$
$$\cos(\omega t) \to x_C(t,\omega)$$

Szemléltessük az elmondottakat az aktuális példánkon, azaz az alulcsillapított harmonikus lineáris oszcillátoron. Az általános megoldási sémával e fejezet elején már részletesen megismerkedtünk Vázlatszerűen felidézve:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F(t) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{m} \qquad \text{(hivatk)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = f(t) \qquad \text{(hivatk)}$$

$$x(t) \equiv x_{IH}(t) = x_H(t) + x_{IHP}(t) \qquad (\;\text{IH}\;)$$

Ha a rendszer kezdetben energiamentes (azaz az oszcillátor nyugalomban volt) , akkor a kezdeti feltételek

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

A tranziens és az állandósult megoldás

$$\lim_{t\to+\infty} x_H(t) = 0$$
$$\lim_{t>>1} x(t) \approx x_{IHP}(t)$$

Nyilvánvalóan a fizikailag csak olyan gerjesztések valósíthatók meg, amelyek valamilyen véges „t_0” időpontban kezdődtek. Választhatjuk az időskálánkat úgy, hogy „$t_0=0$” legyen. Azaz

$$F(t) = \begin{cases} F_0(t) & \text{ha} \quad 0 \le t \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases}$$

A bevezetett egységugrás függvénnyel kifejezve

$$F(t) = \theta(t) \cdot F_0(t)$$

és a kezdeti feltételek.

$$x(-0) = 0$$
$$\dot{x}(-0) = 0$$

Az eddigi gerjesztéseink $\{\delta(t), \theta(t)\}$ ilyen $F(t)$ típusúak voltak de a $\{\sin(\omega t), \cos(\omega t)\}$ látszólag nem. Ez azonban nem okozhat matematikai nehézséget, hiszen a kezdeti feltételek megadása éppen azt jelenti, hogy a „$t<0$” időtartomány nem érdekel bennünket. Ott akár az oszcillátorunk teljes nyugalomban is lehet, azaz $x(t<0) = 0$ és $\dot{x}(t<0) = 0$. Ahogyan azt az előzőekben részletesen megtárgyaltuk, egy $F(t)$ gerjesztés hatására a nyugalomban lévő oszcillátor $x(t)$ mozgásfüggvénye egyértelműen meghatározható.

Egy reális dinamikai folyamatot tehát a következő mozgásegyenlet ad meg

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F(t)$$

Ahol

$$F(t) = +F_0 \cdot \theta(t) \cdot \cos(\omega t)$$

és a kezdeti feltételek.

$$x(-0)=0$$
$$\dot{x}(-0)=0$$

A tranziensek lezajlása után ($\alpha\cdot t>>1$)az állandósult megoldást az

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+Dx=F_0\cos(\omega t)\text{, illetve}$$
$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0{}^2x=f_0\cos(\omega t)$$

egyenlet egy lehetséges megoldása adja. Fizikai szemléletünk azt súgja, hogy állandósult állapotban az oszcillátor a gerjesztés „ω” körfrekvenciájával rezeg egy x_0 amplitúdóval és gerjesztéshez képest „γ” fáziskéséssel. A rezgés amplitúdóját és a fáziskésést az aktuális gerjesztés „ω” körfrekvenciája határozza meg.

Célszerű tehát az állandósult megoldást a következő alakban keresni

$x(t)=x_0\cdot\cos(\omega t-\gamma)$, ahol
$\gamma(\omega)$ és
$x_0(\omega)$ a meghatározandó függvények.

A megoldás némi átalakítással és közvetlen behelyettesítéssel adódik.

$$x(t)=x_0\cdot\{\cos\gamma\cdot\cos(\omega t)+\sin\gamma\cdot\sin(\omega t)\}$$
$$\dot{x}(t)=x_0\omega\cdot\{-\cos\gamma\cdot\sin(\omega t)+\sin\gamma\cdot\cos(\omega t)\}$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega^2x_0\cdot\{\cos\gamma\cdot\cos(\omega t)+\sin\gamma\cdot\sin(\omega t)\}$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe, átrendezés után kapjuk, hogy

$$\cos(\omega t)\cdot\left\{\left[\omega_0^2-\omega^2\right]\cos\gamma+2\alpha\omega\sin\gamma-\frac{f_0}{x_0}\right\}+\sin(\omega t)\cdot\left\{\left[\omega_0^2-\omega^2\right]\sin\gamma-2\alpha\omega\cos\gamma\right\}=0$$

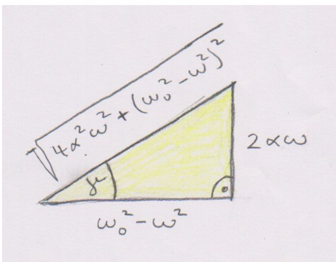
Ennek minden „$t>0$” időpontra teljesülnie kell. Ez csak akkor lehetséges, ha mind a $\sin(\omega t)$, mind pedig a $\cos(\omega t)$ együtthatója azonosan zérus.

Tehát

$$\left[\omega_0^2-\omega^2\right]\cos\gamma+2\alpha\omega\sin\gamma-\frac{f_0}{x_0}=0$$
$$\left[\omega_0^2-\omega^2\right]\sin\gamma-2\alpha\omega\cos\gamma=0$$

A második egyenletből:

$$tg\gamma=\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\qquad\rightarrow\qquad\gamma(\omega)\text{ meghatározható}$$



22/A ábra

A segédábra alapján adódik, hogy

$$\cos\gamma = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Omega} \qquad \text{és} \qquad \sin\gamma = \frac{2\alpha\omega}{\Omega},$$

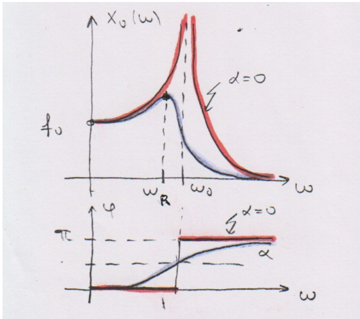
ahol

$$\Omega = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

Mindezeket beírva az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

Ezek eredmények az előtanulmányainkból már ismertek. A függvényeket az alábbi ábrán láthatjuk.



22. ábra

Az $x_0(\omega)$ függvény (az ún, „rezonancia görbe”) maximuma az ω_R értéknél van, amelynek a neve „rezonencia-ferkvencia” és értéke

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

Ha a gerjesztés $f_0 \sin(\omega t)$, akkor ez átírható $f_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ alakba. Így könnyen belátható, hogy az állandósult megoldás a következő lesz

$$x(t) = x_0 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) = x_0 \cdot \sin(\omega t - \gamma)$$

Ahol { $\gamma(\omega)$ és $x_0(\omega)$ } a fenti függvények.

Láttuk, hogy minden jól viselkedő $f(t)$ függvény Fourier integrál alakjába irható, amely különböző körfrekvenciájú „$\sin(\omega t)$” és „$\cos(\omega t)$” függvény összegzésével kapható. Ennek alapján remélhető, hogy a fenti eredmények szépen beilleszthetők a lineáris rendszerek elméletébe.

Ez valóban így is van!

Tekintsünk egy lineáris rendszert és adjunk rá „$\sin\omega t$” és/vagy „$\cos\omega t$” gerjesztéseket.

Ekkor rendszer válaszfüggvényei a következők lesznek:

$f(t) = 1 \cdot \sin\omega t$	esetén a válasz	$x_S(t,\omega)$
$f(t) = 1 \cdot \cos\omega t$	esetén a válasz	$x_C(t,\omega)$

A válaszfüggvényekbe beírt „ω” azt jelenti, hogy a válaszfüggvények minden „ω” körfrekvencián mások lesznek/lehetnek.

A mi példánkban a válaszfüggvények a következők voltak:

$$x_C(t,\omega) = x_0(\omega) \cdot \cos[\omega t - \gamma(\omega)],$$

$$x_S(t,\omega)=x_0(\omega)\cdot\sin[\omega t-\gamma(\omega)]$$

Mármost, ha a gerjesztés

$$f(t)=:\int_0^\infty\{A(\omega)\cdot\sin(\omega t)+B(\omega)\cdot\cos(\omega t)\}d\omega,$$

akkor a válaszfüggvény nyilvánvalóan a következő lesz

$$x(t)=:\int_0^\infty\{x_S(t,\omega)\cdot\sin(\omega t)+x_C(t,\omega)\cdot\cos(\omega t)\}d\omega$$

Most szemléltetésként alkalmazzuk ezt a „csillapított harmonikus oszcillátorra”. Az eredmények nyilvánvalóak, hiszen az { $x_S(t,\omega)$ és $x_C(t,\omega)$ } válasz függvényeket éppen az imént határoztuk meg.

A gerjesztés legyen

$$f(t)=:\int_0^\infty\{A(\omega)\cdot\sin(\omega t)+B(\omega)\cdot\cos(\omega t)\}d\omega$$

A válaszfüggvény ekkor:

$$x(t)=:\int_0^\infty\{X_{0S}\cdot\sin(\omega t-\gamma)+X_{0C}\cdot\cos(\omega t-\gamma)\}d\omega$$

Ahol

$$\gamma(\omega)=artg\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

$$X_{0S}=\frac{A(\omega)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

$$X_{0C}=\frac{B(\omega)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

A válaszfüggvény természetesen átírható úgy, hogy a „$\sin\omega t$” és „$\cos\omega t$”gerjesztések jelenjenek meg benne. Elemi számolás után kapjuk, hogy

$$x(t)=:\int_0^\infty\{C_S(\omega)\cdot\sin(\omega t)+C_C(\omega)\cdot\cos(\omega t)\}d\omega$$

Ahol

$$C_S=+X_{0S}\cos\gamma+X_{0C}\sin\gamma$$
$$C_C=-X_{0S}\sin\gamma+X_{0C}\cos\gamma$$

Természetesen a $\{\,X_{0S}(\omega),\ X_{0C}(\omega),\ \gamma(\omega)\,\}$ a fent megadott függvények.
Láthatóan „összekeverednek” az elemi válaszfüggvény amplitúdók miáltal a végeredmény sokat veszít a „szemléletességéből”. És ez még csak egy igen egyszerű rendszer volt.

A konklúzió nyilvánvaló:
”Ez a módszer nagyon számításigényes. Bonyolultabb rendszereknél **gyakorlatilag alkalmazhatatlan** !”

Most lép színre **„mentőövként" a Fourier transzformáció.**

Ez az egyre nagyobb bonyolultságban tesz rendet és ennek kapcsán ad egyfajta igen hatékony szemléletet.
Az oszcillátor példában megjelenő „keveredés" azt sejteti, hogy a komplex függvényekre való áttérés segíteni fog

Amikor az $x(t)$ függvényhez kiszámoltuk az $\{\tilde{X}_S(\omega), \tilde{X}_C(\omega)\}$ spektrumot, valójában egyfajta „függvény-transzformációt" hajtottunk végre. Egy „t" változójú függvényből „ω" változójút csináltunk.
Emlékeztetőül:

$$x(t) =: \int_0^\infty \{\tilde{X}_S(\omega)\cdot\sin(\omega t) + \tilde{X}_C(\omega)\cdot\cos(\omega t)\} d\omega$$

$$\tilde{X}_S(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty x(t)\cdot\sin(\omega t)dt$$

$$\tilde{X}_C(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty x(t)\cdot\cos(\omega t)dt$$

Ne felejtsük el, hogy az $x(t)$ aperiódikus függvényt a $[0,T]$ időtartományra periódikus függvényből kaptuk T →∞ határátmenettel. Ezért lett az integrálási tartomány a $[0,+\infty)$. Természetesen az időskála tetszőlegesen eltolható, a végeredmény ettől független marad. Definiáljuk az időtengelyt úgy, hogy az $x(t)$ aperiodikus függvény „ősének" a periódusa a $\left[-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}\right]$ tartomány legyen. Ekkor a T →∞ határátmenet esetén a $(-\infty,+\infty)$ időtartományt kapjuk. Azaz írhatjuk, hogy

$$\tilde{X}_S(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty x(t)\cdot\sin(\omega t)dt \qquad \text{(FTT)}$$

$$\tilde{X}_C(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty x(t)\cdot\cos(\omega t)dt$$

Ezeket nevezik (valós) Fourier transzformációnak.
Értelem szerűen az egyik a „sin-Fourier" a másik a „cos- Fourier" transzformáció.
Látható, hogy

$$\tilde{X}_C(-\omega) = +\tilde{X}_C(\omega)$$

$$\tilde{X}_S(-\omega) = -\tilde{X}_S(\omega)$$

Azaz sin/cos-Fourier transzformáltak mintegy „magukkal viszik" a"páros-páratlan" szimmetriát.

Most térjünk át komplex függvényekre. Egyszerű matematikai azonosságokat fogunk alkalmazni. Azaz semmiféle új „általánosítást" vagy „heurisztikus trükköt" nem kell bevetnünk. Nincsen „deus ex machina".

$$x(t) =: \int_0^\infty \{\tilde{X}_S(\omega)\cdot\sin(\omega t) + \tilde{X}_C(\omega)\cdot\cos(\omega t)\} d\omega =$$

$$=: \int_0^\infty \left\{\tilde{X}_S(\omega)\cdot\frac{\exp\{+i\omega t\}-\exp\{-i\omega t\}}{2i} + \tilde{X}_C(\omega)\frac{\exp\{+i\omega t\}+\exp\{-i\omega t\}}{2}\right\} d\omega =$$

$$=: \int_0^\infty \left\{\frac{\tilde{X}_C(\omega)-i\tilde{X}_S(\omega)}{2}\cdot\exp\{+i\omega t\} + \frac{\tilde{X}_C(\omega)+i\tilde{X}_S(\omega)}{2}\cdot\exp\{-i\omega t\}\right\} d\omega$$

Tudjuk, hogy az $\{\tilde{X}_S(\omega), \tilde{X}_C(\omega)\}$ valósak. Vezessük be a következő komplex mennyiséget

$$\tilde{X}(\omega) \equiv \frac{\tilde{X}_C(\omega) - i\tilde{X}_S(\omega)}{2}.$$

Ennek komplex konjugáltja

$$\tilde{X}^*(\omega) \equiv \frac{\tilde{X}_C(\omega) + i\tilde{X}_S(\omega)}{2}$$

Így tehát a valós $x(t)$ függvényre kapjuk, hogy

$$x(t) = \int_0^\infty \left\{\tilde{X}(\omega) \cdot \exp\{+i\omega t\} + \tilde{X}^*(\omega) \cdot \exp\{-i\omega t\}\right\} d\omega$$

Tagonként integrálva

$$x(t) = \int_0^\infty \tilde{X}(\omega) \cdot \exp\{+i\omega t\} \cdot d\omega + \int_0^\infty \tilde{X}^*(\omega) \cdot \exp\{-i\omega t\} \cdot d\omega \qquad \text{(KFT)}$$

Ugyanakkor

$$\tilde{X}(-\omega) = \frac{\tilde{X}_C(\omega) + i\tilde{X}_S(\omega)}{2} = \tilde{X}^*(\omega)$$

A második tagban azonos átalakításokat tehetünk

$$\int_0^\infty \tilde{X}^*(\omega) \cdot \exp\{-i\omega t\} \cdot d\omega = \int_0^\infty \tilde{X}(-\omega) \cdot \exp\{+i(-\omega)t\} \cdot d(-\omega) \cdot [-1]$$

Hajtsuk végre az $(-\omega) \to (+\omega')$ változó cserét! Kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty \tilde{X}(-\omega) \cdot \exp\{+i(-\omega)t\} \cdot d(-\omega) \cdot [-1] = \int_{-\infty}^0 \tilde{X}(\omega') \cdot \exp\{+i\omega' t\} \cdot d\omega'$$

Ezt visszaírva az eredeti (KFT) egyenletbe láthatjuk, hogy ugyanannak a függvénynek két különböző tartományra vett integrálja szerepel. Végülis kapjuk, hogy :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(\omega) \cdot \exp\{+i\omega t\} d\omega$$

Most írjuk fel komplex „$\tilde{X}(\omega)$" definícióját és alkalmazzuk a $\{\tilde{X}_S(\omega), \tilde{X}_C(\omega)\}$ valós frekvenciafüggvények (FTT) definíciós egyenleteit

$$\tilde{X}(\omega) \equiv \frac{\tilde{X}_C(\omega) - i\tilde{X}_S(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \cdot dt$$

Azaz kaptuk, hogy

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} \cdot dt$$

Neve komplex Fourier transzformáció.

Azt szoktuk mondani, hogy:

„Az $x(t)$ valós időfüggvény Fourier transzformáltja az $\tilde{X}(\omega)$ komplex frekvenciafüggvény"

Gyakran mondjuk azt is, hogy :" Az $x(t)$ függvény **Fourier spektruma** az $\tilde{X}(\omega)$**."**

A Fourier transzformációra a következő szimbólumot használjuk

$$\mathcal{F}[\mathrm{x(t)}] = \tilde{X}(\omega)$$

Amint már régebben utaltunk rá, a Fourier transzformáció mindig létezik, ha a transzformálandó függvény „abszolút integrálható”, vagy -„négyzetesen integrálható”

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = k \qquad \text{vagy} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = k$$

Abból, hogy $f(t)$ valósfüggvény a Fourier transzformációra következik, hogy

$$f(t) = f(t)^{\bullet} \quad \rightarrow \quad \tilde{F}(-\omega) = \tilde{F}^{*}(\omega)$$

Néhány fontos **tétel** a Fourier transzformációra

A **derivált** Fourier transszformáltja.:

$$\mathcal{F}[\partial_t f(t)] = i\omega \, \mathcal{F}[f(t)] =$$

A **konvolúció**s integrál Fourier transszformáltja

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-t') \cdot f_2(t') dt'\right] = 2\pi \cdot \mathcal{F}[f_1(t)]\, \mathcal{F}[f_2(t)]$$

Hagyományos függvényeket tartalmazó Fourier transszformáció

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \exp\{-i\omega \cdot t_0\}\, \mathcal{F}[f(t)] =$$

$$\mathcal{F}[\exp\{-\beta \cdot |t|\}] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

Disztribúciókat tartalmazó Fourier transszformáció

$$\mathcal{F}[1] = \delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi}$$

$$\mathcal{F}[\theta(t)] = \frac{1}{2}\delta(\omega) - i\frac{1}{2\pi\omega}$$

A Dirac-delta előállítható komplex függvénnyel is.
Képezzük a következő integrált

$$D_a(t) \equiv \int_{-a}^{+a} \exp\{i\omega t\} d\omega$$

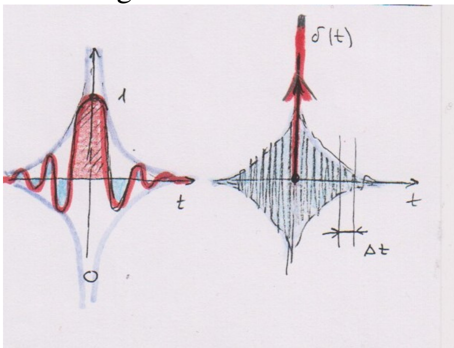
$$D_a(t) = \left[\frac{1}{it}\exp\{i\omega t\}\right]_{-a}^{+a} = \frac{1}{it}[\exp\{+ia \cdot t\} - \exp\{-ia \cdot t\}] = \frac{2}{t}\sin\{a \cdot t\} = 2\pi \cdot \frac{\sin(a \cdot t)}{\pi \cdot t}$$

Majd képezzük a $(a \rightarrow \infty)$ határértéket

$$\lim_{a\rightarrow} D_a(t) = 2\pi \cdot \delta(t)$$

Ez a Dirac-deltának egy „szokatlan” előállítása, mert nem a „összenyomás-nyújtás” ötletén alapul, mint az eddig elképzeltük. A $t = 0$ pont környezetét kivéve jelöljünk ki bárhol egy tetszőlegesen kicsiny (véges) Δt tartományt. (ábra) Ha $(a >> 1)$ akkor a Δt szakaszon nagyon nagyszámú oszcillációt találunk. Egy integrálás során ennek a járuléka, nyílván zérus. Ha a Δt a $t = 0$ körül van, akkor a $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ páros függvény határérték miatt a t=0 pontban a függvény ∞ értéket vesz fel.

Ez pedig valóban egy Dirac deltát jelenít meg.



23 ábra

Ennek alapján belátható, hogy

$$\delta(\omega-\omega')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\cdot(\omega-\omega')\cdot t}\,dt$$

Lineáris rendszerek és a Fourier transzformáció

A lineáris rendszerek egyik fontos rendszerjellemző függvénye a $G(t)$ Green-fügvény volt. Ez a rendszernek a Dirac-delta gerjesztésre adott válaszfüggvénye. Ezért, ha rendszerre egy $f(t)$ gerjesztés hat, akkor az $x(t)$ válaszfüggvénye

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\cdot G(t-t')dt'$$

Ebben a konvoluciós integrálban a kauzalitás teljesülését a Green-függvény biztosítja azzal, hogy $G(t-t')=0$ ha $t'\geq t$. Vegyük mind a két oldal Fourier transzformáltját. Az előzőek alapján

$$\tilde{X}(\omega)=2\pi\cdot\tilde{G}(\omega)\cdot\tilde{F}(\omega) \qquad \text{(XGF)}$$

Azaz a $\tilde{G}(\omega)$ is egy rendszerjellemző (komplex) függvény, és **„átviteli függvénynek”** nevezzük. Tehát a Greeen függvény Fourier transzformáltja az átviteli függvény.

A szokásos szimbólumokkal kifejezve:

$$\mathscr{F}\,[G(t)]=\tilde{G}(\omega)$$

Euler alakban írva

$$\tilde{G}(\omega)=G(\omega)\cdot\exp\{-i\gamma\}$$

Látható, hogy a frekvencia tartományban kapott (XGF) „hatás-válasz” lineáris kapcsolat egy egyszerű szorzat alakjában jelenik meg, az időtartományban felírt konvolúciós integrál helyett. A kauzalitást most a $G(\omega)$ komplex függvény speciális matematikai tulajdonsága kell, hogy biztosítsa.

Erre még később visszatérünk.

Most nézzük meg, hogy hogyan alkalmazható a Fourier analízis a mi példánkon, azaz a csillapított harmonikus oszcillátor esetében.
A jól ismert mozgásegyenlet

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^{\,2}x=f(t)$$

Vegyük mind a két oldal Fourier transzformáltját. Mivel tudjuk, hogy

$$\mathscr{F}[\,x(t)\,] = \tilde{X}(\omega)$$

és

$$\mathscr{F}[\,\dot{x}(t)\,] = i\omega \cdot \tilde{X}(\omega)$$

Ezért kapjuk, hogy

$$\left(-\omega^2 + i \cdot 2\alpha\omega + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \tilde{X}(\omega) = \tilde{F}(\omega)$$

Tehát

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right) + i \cdot 2\alpha\omega}\,\tilde{F}(\omega)$$

Ezt összehasonlítva (XGF) –el adódik, hogy

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right) + i \cdot 2\alpha\omega}$$

Ez pedig a $\mathscr{F}\,[G(t)] = \tilde{G}(\omega)$ miatt az alábbi Green-függvény Fourier transzformáltja.

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t) & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases}$$

Továbbá $\tilde{G}(\omega)$-t Euler alakba írva adódik, hogy

$$\frac{1}{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right) + i \cdot 2\alpha\omega} = G(\omega) \cdot \exp\{-i\gamma\}$$

Ahol

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

$$tg\,\gamma(\omega) = +\frac{2\alpha\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Ebben pedig felismerhetjük az $f(t) \equiv 1 \cdot \cos(\omega t)$ gerjesztésre adott $x_C(t,\omega) = G(\omega) \cdot \cos(\omega t - \gamma(\omega))$ válaszfüggvény ismert adatait.
A kapcsolat szemléletessé válik, ha önállóan is megoldjuk az oszcillátor mozgásegyenletét $1 \cdot \cos(\omega t)$ és $1 \cdot \sin(\omega t)$ gerjesztésekre.

$$\ddot{x}_C + 2\alpha\dot{x}_C + \omega_0^{\,2} x_C = 1 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_S + 2\alpha\dot{x}_S + \omega_0^{\,2} x_S = 1 \cdot \sin(\omega t) \qquad \Big|\cdot(i)$$

Az ismert megoldások:

$$x_C = X_0(\omega) \cdot \cos\{\omega t - \gamma(\omega)\}$$

$$x_S = X_0(\omega)\cdot\sin\{\omega t - \gamma(\omega)\}$$

Kombináljuk egymással a két mozgásegyenletet és vezessük be az alábbi jelöléseket

$$x(t) \equiv x_C(t) + i\cdot x_S(t) = X_0\cdot\exp\{i(\omega t - \gamma)\}$$
$$f(t) = \cos(\omega t) + i\cdot\sin(\omega t) \equiv \exp\{i\omega t\}$$

Ezekkel a mozgásegyenlet

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^{\ 2}x \ = 1\cdot\exp(i\omega t)$$

Írjuk be a megoldásfüggvényt ebbe e mozgásegyenletbe

$$\left(-\omega^2 + i\cdot 2\alpha\omega + \omega_0^2\right)\cdot X_0\cdot\exp\{\exp i(\omega t - \gamma)\} = 1\cdot\exp\{i\omega t\}$$

Az „$\exp\{i\omega t\}$”-vel való egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$X_0\cdot\exp\{-i\gamma\} = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\cdot 2\alpha\omega} = \tilde{G}(\omega)$$

Joggal merül fel a kérdés, hogy miért ilyen kerülő úton kaptuk meg ezt az összefüggést és miért nem a Fourier transzformáció formális alkalmazásával? A válasz egyszerű. Tekintsük szóban forgó mozgásegyenletünket.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^{\ 2}x \ = 1\cdot\exp(i\omega t)$$

Fourier transzformáció után kapjuk

$$\left(-\omega^2 + i\cdot 2\alpha\omega + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\tilde{X}(\omega) = \tilde{F}(\omega)$$

Ahol most

$$\tilde{F}(\omega) = \mathscr{F}[\exp\{i\sigma t\}]$$

Igen ám, de az „$\exp\{i\sigma t\}$” függvény **nem négyzetesen integrálható**, hiszen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\exp\{i\omega t\}\right|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot dt \to \infty \text{ azaz nem létezik!}$$

Ezért a Fourier transzformáció számítása nem triviális.
Alkalmazzuk

$$\tilde{F}(\omega) = \mathscr{F}[\exp\{i\sigma t\}] = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{i\omega t}\right]\cdot\exp\{-i\omega t\}\cdot dt \to \infty \quad \text{mint az előbb!}$$

Valójában a kapott eredmény (is) egy disztribúció Hiszen a már ismertetett összefüggésből

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\cdot(\omega-\omega')\cdot t}\,dt$$

$$\tilde{F}(\omega) = \mathscr{F}[\exp\{i\sigma t\}] = [\delta(\omega - \omega')] \text{ és } (\omega \to \omega')$$

De mint azt tudjuk $\delta(0)$-t nem lehet értelmezni.

Csak a

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

Kifejezést definiáltunk.

MEGJEGYZÉS: Az ilyen típusú „matematikai nehézségeken” segít a fizikai feladatok megoldásában a Laplace transzformáció.

Az energiaspektrum

Tekintsük kiindulásul ismét a szabad (alul)csillapított oszcillátor $x(t)$ mozgásegyenletét. Az általánosított munkatétel szerint (AMT) az oszcillátor mechanikai energiája (a csillapítás miatt) folyamatosan csökken. A leadott teljesítmény, mint azt láttuk:

$$P_{LE}(t) = -k \cdot \dot{x}^2$$

A leadott összes mechanikai energia

$$E_{LE} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{LE}(t)dt ,$$

azaz

$$E_{LE} = -k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{x} \cdot \dot{x})dt$$

Írjuk át ezt az integrált úgy, hogy a „*t*” helyett a változó az „ω” körfrekvencia legyen.
Azaz

$$E_{LE} = -\int_{0}^{+\infty} \varepsilon(\omega)d\omega$$

Az $\varepsilon(\omega)$ neve „**spektrális energia sűrűség**”. Eszerint az „$\varepsilon(\omega)d\omega$” megadja az $(\omega, \omega + d\omega)$ frekvenciatartományban leadott energia nagyságát. Joggal merülhet fel a kérdés, hogy miért fontos ez a fogalom? Ennek oka a következő. A mikroszkopikus skálán az anyag atomjai kicsiny rezgő „atomi oszcillátoroknak” tekinthetők. Ezek az oszcillátorok elektromágneses hullámok formájában energiát adnak le. A gyakorlati spektroszkópia célja éppen ennek az $\varepsilon(\omega)$-nek a megmérése. Mármost az a kérdés, hogy a mért eredményekből tudunk-e következtetni a rezgő atomi töltés (klasszikus) dinamikai tulajdonságaira. A válasz „Igen”. A következőkben megvizsgáljuk, hogy ezt hogyan tehetjük meg.

A kitűzött feladat azért indokolt, mert a mérések során valóban a most meghatározásra kerülő $\varepsilon(\omega)$ energia spektrumot tapasztaljuk.

MEGJEGYZÉS: Ugyanakkor tudjuk már azt is, hogy az atomok szintjén a klasszikus mechanika helyett a kvantummechanikát kell használnunk a fizikai modellek magalkotásakor. Hogyan lehet az, hogy itt mégis a „newtoni modell” viszonylag jó eredményt szolgáltat. Ennek oka mélyebb kvantummechanikai megfontolásokat igényel. Itt kénytelenek vagyunk a majdani szilárdtest-fizikai, illetve optikai tanulmányokra hivatkozni.

Keressük meg tehát az $\varepsilon(\omega)$ matematikai alakját!
Adjuk meg a második „$\dot{x}$”-ot Fourier integráljával

$$E_{LE} = -k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\dot{X}}(\omega) \cdot \exp\{+i\omega t\} \cdot d\omega \right\} dt$$

Cseréljük fel a két integrál sorrendjét. Ez megtehető, hiszen az „$\{\omega, t\}$” független változók. :

$$E_{LE} = -k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\dot{X}}(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) \cdot \exp\{+i\omega t\} \cdot dt \right\} d\omega$$

De az idő szerinti integrálás Fourier transzformációvá alakítható a következő „trükkel”:

$$E_{LE} = -k \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\dot{X}}(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) \cdot \exp\{-i(-\omega)t\} \cdot dt \right\} d\omega ,$$

azaz

$$E_{LE} = -k \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\dot{X}}(\omega) \cdot \tilde{\dot{X}}(-\omega) d\omega = -k \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{\dot{X}}(\omega)\right|^2 d\omega = -k \cdot 4\pi \int_{0}^{+\infty} \left|\tilde{\dot{X}}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Itt kihasználtuk azt, hogy (mivel *x(t)* valós függvény, ezért)

$$\tilde{X}(\omega)^* = \tilde{X}(-\omega),$$

valamint $\left|\tilde{\dot{X}}(\omega)\right|^2$ szükségképpen páros függvény.

Így tehát kapjuk, hogy a csillapított oszcillátor energia spektruma (vagy „spektrális energiasűrűsége")

$$\varepsilon(\omega) = k \cdot 4\pi \cdot \left|\tilde{\dot{X}}\right|^2$$

Mivel

$$\tilde{\dot{X}}(\omega) = i\omega \cdot \tilde{X}(\omega)$$

Ezért

$$\varepsilon(\omega) = k \cdot 4\pi \cdot \omega^2 \left|\tilde{X}\right|^2$$

Ugyanakkor láttuk azt is, hogy a (alul)csillapított szabad oszcillátor *x(t)* függvénye maga a Green függvény. Ezért

$$\varepsilon(\omega) = k \cdot 4\pi \cdot \omega^2 \left|\tilde{G}\right|^2$$

Azaz az előzőek alapján

$$\varepsilon(\omega) = 4\pi \cdot k \cdot \frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

Vezessük be egy új változót

$$\xi \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$$

Valamint legyen

$$\beta \equiv \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{k}{m\omega_0}$$

Így

$$\varepsilon(\omega) = 4\pi \cdot \frac{m}{\omega_0} \cdot \frac{\beta \cdot \xi^2}{\left(1 - \xi^2\right)^2 + \beta^2 \cdot \xi^2} \equiv 4\pi \frac{m}{\omega_0} \cdot \varphi_\varepsilon(\xi)$$

Könnyen igazolható, hogy az $\varphi_\varepsilon(\xi)$ függvény maximuma az $\omega = \omega_0$ frekvenciánál van és itt $\varphi_\varepsilon(1) = \frac{1}{\beta}$.

A spektrum „hízottságát" az ún. „**fél érték szélességgel**" jellemezzük, amelyneka definíciója a következő

$$\Delta\xi_{1/2} \equiv \xi_2 - \xi_1, \text{ ahol } \varphi_\varepsilon(\xi_1) = \varphi_\varepsilon(\xi_2) = \frac{1}{2\beta}$$

Ennek meghatározásához meg kell oldanunk az alábbi egyenletet.

$$\varphi_\varepsilon(\xi) = \frac{\beta\xi^2}{\left(1 - \xi^2\right)^2 + \beta^2\xi^2} = \frac{1}{2\beta}$$

Átrendezés után:

$$2\beta^2\xi^2 = \left(1 - \xi^2\right)^2 + \beta^2\xi^2$$

Azaz

$$\beta^2\xi^2 = \left(1-\xi^2\right)^2$$

A gyökvonás után

$$\pm\beta\xi = \left(1-\xi^2\right)$$

$$\xi^2 \pm \beta\xi - 1 = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva

$$\xi_{12} = \pm\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1}$$

De tudjuk, hogy $\xi_{12} > 0$ kell, hogy legyen. Ezért a gyök előtt csak „+” előlel állhat, tehát

$$\xi_{12} = \pm\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1}$$

Ezért aztán

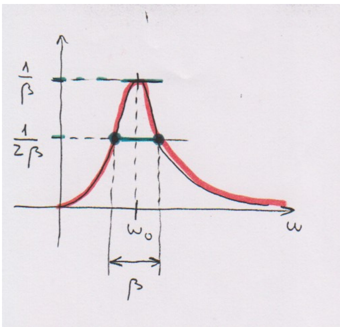
$$\Delta\xi_{1/2} \equiv \xi_2 - \xi_1 = \beta$$

A körfrekvenciára áttérve

$$\frac{\Delta\omega_{1/2}}{\omega_0} = \frac{k}{m\omega_0},$$

azaz

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{k}{m}$$



24.ábra

Összefoglalva az eredményeinket a következőkre jutottunk.

a.) A „**spektrális energia sűrűség**” maximumának a helye a csillapítatlan oszcillátor „ω_0” sajátfrekvenciájánál van.

b.) A „fél-érték szélesség” megadja a csillapítási tényező értékét.

A kauzalítás és az átviteli függvény

Láttuk, hogy egy lineáris rendszer esetén a $\tilde{G}(\omega)$ (átviteli függvény) egyértelműen jellemzi a rendszer dinamikai tulajdonságait. Ugyanis segítségével a „hatás-válasz” kapcsolat számszerűen meghatározható. Ez a kapcsolat az „ω” körfrekvencia tartományban „nagyon egyszerű”.

$$\tilde{X}(\omega) = 2\pi \cdot \tilde{G}(\omega) \cdot \tilde{F}(\omega)$$

A matematikai nehézségeket mintegy a Fourier transzformációra helyeztük át.

Az előzőekben már jeleztük, hogy érdemes megtudni, hogy melyek a $\tilde{G}(\omega)$ -nak azok az általános (rendszer-független) tulajdonságai, amelyek a kauzalitás fizikai követelményét teljesítik. Ugyanis, ha ezt tudjuk, akkor „rápillantva” a z átviteli függvényre meg tudjuk mondani, hogy a rendszerünk kauzális-e vagy sem. Ez sok fölösleges számolástól szabadít meg minket.

Az elkövetkezőkben, ezt fogjuk meg vizsgálni, a konkrét példánkon (alulcsillapított harmónikus oszcillátor) keresztül.

Az átviteli függvény jól ismert:

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\cdot 2\alpha\omega}$$

Mint azt tudjuk, ez a $G(t)$ Green-függvény (Dirac delta gerjesztésre adott válasz) Furier transzformáltja

$$\mathscr{F}\left[G(t)\right]=\tilde{G}(\omega)$$

ahol

$$G(t)\begin{cases}=0 & \text{ha } t\le 0\\ \ne 0 & \text{ha } t>0\end{cases}$$

A kauzalitást Green függvénynek $t\le 0$ tartományban való „eltűnése" biztosítja. A kérdés az, hogy hogyan jelentkezik mindez a $\tilde{G}(\omega)$ ban. Ebben a fejezetben erre keressük meg a választ.

Határozzuk meg azon „ω" körfrekvenciákat, amelyeknél a $\tilde{G}(\omega)$ -nek a nevezője zérus. Ezeket a frekvenciákat a $\tilde{G}(\omega)$ **„pólusainak"** nevezzük.

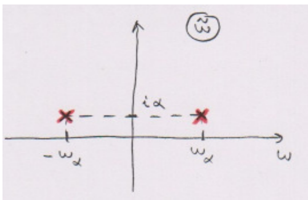
Jelen esetben ezek könnyen kiszámíthatók, hiszen

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\cdot 2\alpha\omega=0$$

Elemi átrendezés után az egyenlet megoldása

$$+\omega^2-i\cdot 2\alpha\omega-\omega_0^2=0$$

$$\omega_{12}=i\alpha\pm\sqrt{(i\alpha)^2+\omega_0^2}=i\alpha\pm\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=i\alpha\pm\omega_\alpha\in\{\text{Komplex számok}\}$$



25.Ábra

Tehát a pólusok a komplex sík felső részén *(Im>0)* vannak. Mostantól kezdve ω-t komplexnek fogjuk tekinteni és (ezért) $\tilde{\omega}$ -al fogjuk jelölni.

Ahhoz, hogy lássuk azt, hogy $\tilde{G}(\tilde{\omega})$-nak mely tulajdonsága jelenti a kauzalitás megvalósulását egy kis matematikai kitérőt kell tennünk. A komplex függvénytan eredményeit igen gyakran használjuk a klasszikus fizikai modelljeinkben **is**. Ennek egyik oka az, hogy a komplex függvénytan egyes tételei viszonylag egyszerű formában adnak olyan eredményeket, amelyek a valós függvények halmazán nagyon bonyolult számításokat igényelnének. Ez a komplex számok elemi tulajdonsága miatt van így.

Matematikai kiegészítő (a komplex függvénytan néhány alapfogalma)

Most két alapvető tétellel kell megismerkednünk. Ezekkel már a „Komplex függvénytan" bevezető fejezetiben találkozhatunk. Alapvető fontosságuk innen is sejthető. Nem törekszünk matematikai precízitásra. Ezt átengedjük az éppen most futó matematikai tantárgyaknak. Csak annyira leszünk pontosak, amennyire a példánkban szereplő „csillapított oszcillátor" tárgyalásánál szükség van. Azaz minden görbe vonal elegendően sima, minden tartomány topológiája megfelelő, stb…

Az alapvető tételek a következők

a.) A deriválhatóság „Cauchy-Riemann" feltétele:

Adott egy $f(z)$ „komplex változós komplex függvény”. Azaz mind az „f” , mind pedig a „z” komplex számok és

$$f \equiv u + iv$$
$$z \equiv x + iy \ .$$

Az $f(z)$ akkor deriválható, ha $\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ határérték egyértelmű, azaz a „Δz” irányától függetlenül, mindig ugyanazt az eredményt adja. Ne felejtsük el, hogy **komplex síkon** egy adott pontot végtelen sok irányból megközelítetünk!). Ekkor viszont választhatunk speciális irányokat

Legyen pl.

$$[\Delta z]_x = i\Delta y \ \text{ és}$$
$$[\Delta z]_y = \Delta x \ .$$

Ekkor a deriválhatóság feltétele az, hogy

$$\left[\frac{df}{dz}\right]_x = \left[\frac{df}{dz}\right]_y$$

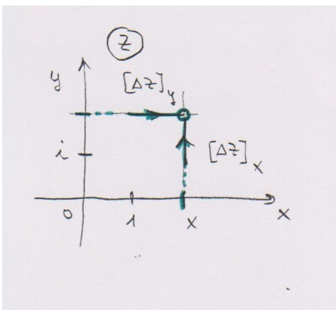
Ahol:

$$\left[\frac{df}{dz}\right]_x = \frac{\partial f}{\partial(iy)} = \frac{\partial u + \partial(iv)}{\partial(iy)} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\left[\frac{df}{dz}\right]_y = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u + \partial(iv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

A kettőt összehasonlítva adódnak a deriválhatóság szükséges feltételei. Ezek az ún. Cauchy-Riemann féle egyenlőségek, azaz

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

A deriválható $f(z)$-ket „reguláris”-nak nevezzük.



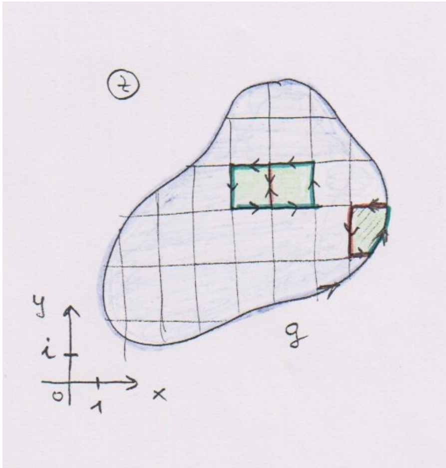
26.ábra

b.) „Cauchy-féle integráltétel”

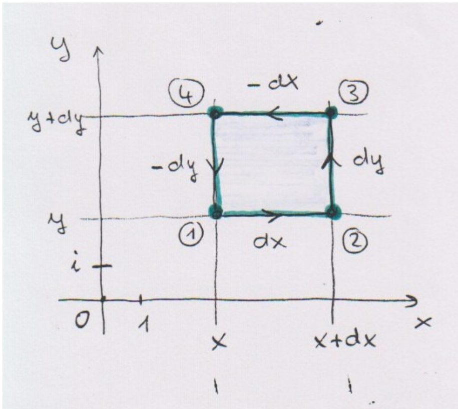
Adott egy mindenhol deriválható (reguláris) $f(z)$. Ekkor tetszőleges zárt görbére

$$\oint f(z)dz = 0$$

A szemléletes bizonyítás a következő. „Hálózzuk” be a zárt görbe által körülhatárolt felületet. Ekkor nyílvánvaló, hogyha akármelyik kicsiny négyzetvonalra igaz a fenti tétel, akkor az egész zárt görbe vonalra is igaz. Ezért elegendő „csak” egy kis négyzetet vizsgálnunk.



27.ábra



28.ábra

A négyzet csúcsait rendre $\{1.2.3.4\}$számokkal jelöljük. Ekkor

$$\oint_{1234} f(z)dz = \oint_{1234}(udx - vdy) + i\oint_{1234}(vdx - udy)$$

Elegendően kicsiny négyzet esetén, írható, hogy:

$$\oint_{1234}(udx - vdy) = u(y)\cdot dx - v(x+dx)\cdot dy + u(y+dy)\cdot(-dx) - v(x)\cdot(-dy) =$$

$$= -[u(y+dy) - u(y)]\cdot dx - [v(x+dx) - v(x)]\cdot dy$$

Osszuk el mind a két oldalt $(dx\cdot dy)$-al.

$$\frac{1}{dxdy}\oint_{1234}(udx - vdy) = -\frac{[u(y+dy)-u(y)]}{dy} - \frac{[v(x+dx)-v(x)]}{dx} = -\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0$$

Hasonló képpen adódik Az integrál komples részére is

$$\frac{1}{dxdy}\oint_{1234}(vdx - udy) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0$$

A jobb oldalak azért nullák, mert ezek éppen a $\frac{df}{dz}$ deriválhatóságra vonatkozó ún. Cauchy-féle feltételek.

Lineáris rendszerek leírása komplex függvényekkel

Tekintsük ezek után a csillapított oszcillátor átviteli függvényét

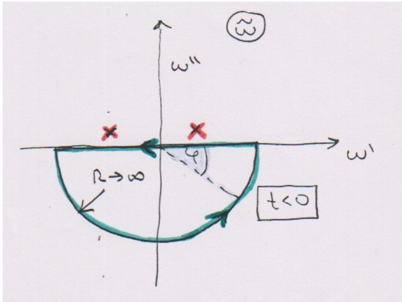
$$\tilde{G}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) + i\cdot 2\alpha\tilde{\omega}} \quad \text{és}$$

jelöljük:

$$\tilde{\omega} \equiv \omega' + i\omega''$$

Láttuk, hogy a $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ pólusai ($\omega_{12} = i\alpha \pm \omega_\alpha$) a felső félsíkon vannak. Ezért a „Cauchy-féle integráltétel" szerint a következő integrálnak zérusnak kell lennie

$$\tilde{G}_-(t) \equiv \oint_{\substack{\text{ALSÓ}\\ \text{ZÁRT}\\ \textit{FÉLKÖR}}} \tilde{G}(\tilde{\omega}) \cdot \exp\{i\tilde{\omega}t\} \cdot d\tilde{\omega} = 0$$



29.ábra

Bontsuk részekre e zárt görbét. Haladjunk először a valós tengelyen, majd az „r" sugarú félköríven. A konvenció szerint (aminek az okát majd később meglátjuk) úgy kell ezt tenni, hogy a zárt görbe belseje mindig baloldalt legyen. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\tilde{G}_-(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} \tilde{G}(\omega') \cdot \exp\{i\omega' t\} d\omega' + \lim_{r\to\infty} \int_{-\pi}^{0} \tilde{G}\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) \cdot \exp\{i\omega' t - \omega'' t\} \cdot \left(r \cdot e^{i\varphi} i d\varphi\right) = 0$$

Az első tag a Green függvény (-1) szerese, azaz „$-G(t)$". A második tag átrendezhető

$$\int_{-\pi}^{0} i \cdot \exp\{i\omega' t + i\varphi\} \cdot \lim_{r\to\infty}\left\{r \cdot \tilde{G}\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right\} \cdot \exp\{-\omega'' t\} \cdot d\varphi$$

Tekintsük az utolsó két tényezőt. Látható, hogy „$r \to \infty$" esetén $\tilde{G} \to \frac{1}{r^2}$. Az alsó fél síkon vagyunk, ahol $\mathrm{Im}\{\tilde{\omega}\} = \omega'' < 0$ és ezért $\omega'' = -|\omega''|$. Ezek miatt írhatjuk, hogy:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{r \cdot \tilde{G}\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right\} \cdot \exp\{-\omega'' t\} = \left[\lim_{r\to\infty} \frac{r}{r^2}\right] \cdot \left[\lim_{\omega''\to\infty} \exp\{+|\omega''| \cdot t\}\right]$$

Most dönteni kell a „t" időparaméter előjeléről. Ha $t \geq 0$ lenne, akkor

$$\frac{\exp\{+|\omega''| \cdot t\}}{r} \to \infty \qquad \text{ha } \left(r, |\omega''| \to \infty\right)$$

és így a Cauchy-féle integráltétel nem teljesülhetne. Tehát az alsó fél-síkon $t < 0$ kell, hogy legyen. Ekkor viszont az alsó félkörön vett integrálás értéke zérus lesz, hiszen

$$\frac{\exp\{-|\omega'' \cdot t|\}}{r} \to 0 \qquad \text{ha } \left(r, |\omega''| \to \infty\right)$$

Tehát az eddigiek értelmében azt kapjuk, hogy

$$\tilde{G}_-(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} \tilde{G}(\omega') \cdot \exp\{i\omega' t\} d\omega' + 0 = -G(t \leq 0) = 0$$

Tehát a kauzalitás teljesül.

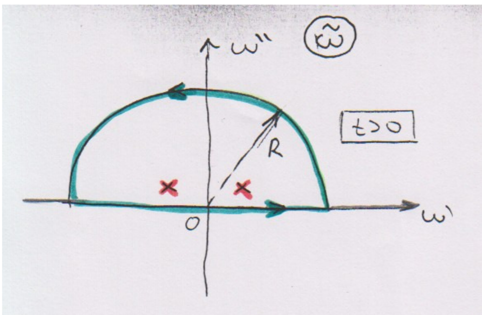
Összefoglava:

A lineáris rendszer akkor kauzlis, ha a $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ átviteli függvénynek nincsen pólusa az alsó félsíkon. Ez pedig a $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ ismeretében könnyen eldönthető.

Ezek után tekintsük a következő, zárt görbére vett integrált

$$\tilde{G}_+(t>0) \equiv \oint\limits_{\substack{\text{FELSŐ}\\ \text{ZÁRT}\\ \textit{FÉLKÖR}}} \tilde{G}(\tilde{\omega})\cdot \exp\{i\tilde{\omega}t\}\cdot d\tilde{\omega}$$

Erre természetesen nem alkalmazható a „Cauchy-féle integráltétel”, hiszen a $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ a pólusoknál nem deriválható.



30.ábra

Az előbbiekhez hasonlóan

$$\tilde{G}_+(t>0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(\omega')\cdot \exp\{i\omega' t\} d\omega' + \int_0^{\pi} i\cdot \exp\{i\omega' t + i\varphi\}\cdot \lim_{r\to\infty}\left\{r\cdot \tilde{G}\left(r\cdot e^{i\varphi}\right)\right\}\cdot \exp\{-\omega'' t\}\cdot d\varphi$$

Mivel a felső félsíkon vagyunk, és „t>0”, ezért $\omega'' t \geq 0$. Így a második tag („félköríven vett integrál”) eltűnik. Kaptuk, hogy

$$\tilde{G}_+(t>0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(\omega')\cdot \exp\{i\omega' t\} d\omega' = G(t>0)$$

Ezt az integrált már meghatároztuk egyszer és ez valóban a Green függvény.

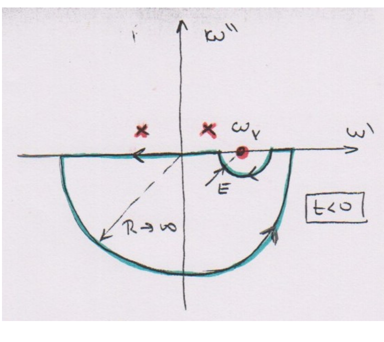
A komplex függvénytan szépségét és igen hasznos voltát mutatja az, hogy ezt $G(t>0)$-t a kijelölt integrálás nélkül is ki tudjuk számítani. Az erre szolgáló tétel neve a „reziduum tétel”.

Kramers-Kronig relációk

A komplex függvénytan lehetőséget ad arra, hogy felderítsük a kapcsolatot $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ valós és képzetes része között. Legyen

$$\tilde{G}(\tilde{\omega}) = G'(\tilde{\omega}) + iG''(\tilde{\omega})$$

Tekintsük a következő, zárt görbére vett integrált.



31.ábra

$$L(\omega_v) = \oint\limits_{\substack{g \\ ALS\acute{O} \\ F\acute{E}LS\acute{I}KON}} \frac{\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega_v} d\tilde{\omega} = 0$$

Az integrandusban lévő $\dfrac{\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega_v}$ komplex függvénynek a pólusai egyrészt a nevezőben lévő ω_v, másrészt a $\tilde{G}(\tilde{\omega})$ pólusai. Mint láttuk a kauzalitás miatt ez utóbbiak nem lehetnek az alsó félsíkon, az ω_v,pedig a valós tengelyen van. Itt alkalmazható a „Cauchy-féle integráltétel”, mert a „trükkösen” felvett zárt görbe nem tartalmaz pólusokat. Bontsuk fel a zárt görbét három részre.

$$g = g_R + g_\Omega + g_E$$

Az előzőekben bemutatott gondolatmenetet követve könnyen belátható, hogy az „R” sugarú, félköríven vett integrál értéke

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{gR} \frac{\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega_v} d\tilde{\omega} = 0$$

Így írható tovább, hogy

$$L(\omega_v) = -\int\limits_A^B \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega - \int\limits_C^D \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega + \int\limits_E \frac{\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega_v} d\tilde{\omega} = 0$$

LCO

Ahol az integrálási határok és kontúrok:

$A \to -\infty$

$B \equiv \omega_v - \varepsilon$

$B \equiv \omega_v + \varepsilon$

$D \to +\infty$

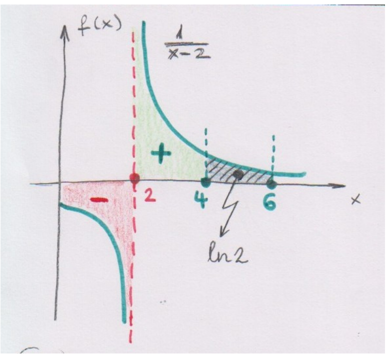
$E \equiv$ „ε” sugarú félkörív és $\varepsilon \to 0$

Az első két tagot „összevonva” értelmezzük és a neve „főérték integrálás”. Ennek jelölésére a következő szimbólumot használjuk

$$+P\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega \equiv \int\limits_{-\infty}^{B} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega + \int\limits_{C}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega$$

MEGJEGYZÉS: A főérték integrálás „trükkjének” a megvilágítására számoljunk ki egy egyszerű numerikus példát.

$$L = \int\limits_0^6 \frac{dx}{x - 2}$$



32ábra

Ha a „hagyományos módszert követjük, akkor kapjuk, hogy

$$L = \left[\ln(x-2)\right]_0^6 = \ln 4 - \ln(-2) = \text{nem értelmezhető}$$

Főérték integrálással kapjuk a következőt:

$$L = P\int_0^6 \frac{dx}{x-2} = \int_0^{2-E} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+\mathrm{E}}^{6} \frac{dx}{x-2} = \left[\ln|x-2|\right]_0^{2-\mathrm{E}} + \left[\ln|x-2|\right]_{2+\mathrm{E}}^6 =$$

$$= (\ln \mathrm{E} - \ln 2) + (\ln 4 - \ln \mathrm{E}) = \ln 2$$

Az LCO harmadik tagját jelöljük $L_{\mathrm{E}}(\omega_v)$-val

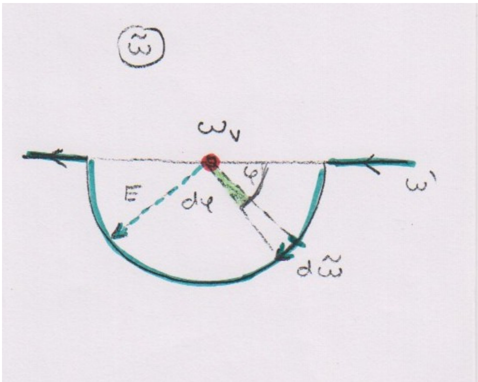
$$L_{\mathrm{E}}(\omega_v) = +\lim_{\mathrm{E}\to 0} \int_E \frac{\tilde{G}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega_v} d\tilde{\omega} = \tilde{G}(\omega_v)\cdot \int_E \frac{1}{\tilde{\omega}-\omega_v} d\tilde{\omega} = \tilde{G}(\omega_v)\cdot \int_E \frac{1}{\tilde{\mathrm{E}}} d\tilde{\mathrm{E}} = \tilde{G}(\omega_v)\cdot \int_E \frac{1}{\tilde{\mathrm{E}}}\cdot(\tilde{E})(-id\varphi)$$

Ahol bevezettünk egy új jelölést

$$\tilde{\mathrm{E}} \equiv \tilde{\omega} - \omega_v$$

$$\tilde{E} \equiv \mathrm{E}\cdot \exp\{-i\varphi\}$$

$$d\tilde{\omega} = d\tilde{\mathrm{E}} = \tilde{E}(-id\varphi)$$



33ábra

Ezzel adódik, hogy

$$L_{\mathrm{E}}(\omega_v) = \tilde{G}(\omega_v)\cdot \int_0^{\pi} \cdot(-id\varphi) = \tilde{G}(\omega_v)\cdot(-i\pi)$$

és így a következő összefüggéshez jutottunk.

$$-P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega-\omega_v} d\omega + \tilde{G}(\omega_v)\cdot(-i\pi) = 0$$

Azaz

$$\tilde{G}(\omega_v) = \frac{i}{\pi}\cdot P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega)}{\omega-\omega_v} d\omega += 0$$

Ide beírva a

$$\tilde{G}(\tilde{\omega}) = G'(\tilde{\omega}) + iG''(\tilde{\omega})$$

Kapjuk

$$G'(\tilde{\omega}) + iG''(\tilde{\omega}) = -\frac{1}{\pi}\cdot P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G''(\omega)}{\omega-\omega_v} d\omega + i\frac{1}{\pi}\cdot P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G'(\omega)}{\omega-\omega_v} d\omega$$

Ezzel sikerült kapcsolatot teremteni az átviteli függvény valós- és képzetes része között

$$G'(\omega_v) = -\frac{1}{\pi}\cdot P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G''(\omega)}{\omega-\omega_v} d\omega$$

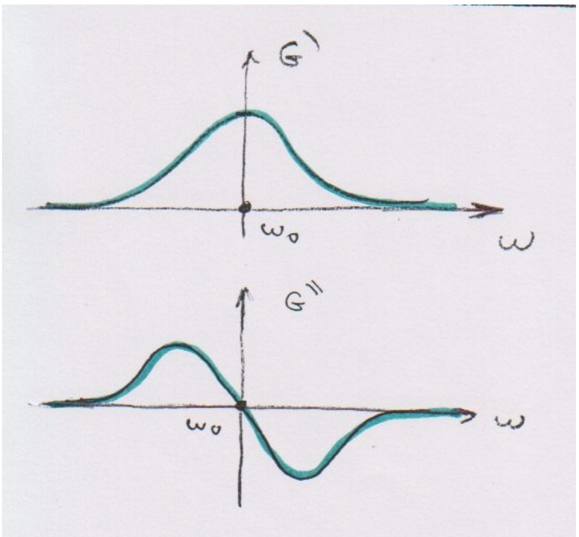
$$G''(\omega_v) = +\frac{1}{\pi} \cdot P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G'(\omega)}{\omega - \omega_v} d\omega$$

Ennek a neve „Kramers-Kronig” relációk. Ez szintén a kauzalítás következménye. Ennek a törvénynek nagy gyakorlati jelentősége van. Ha ugyanis valamilyen nehézség miatt az átviteli függvénynek csak a valós, vagy a képzetes komponense mérhető, akkor a másik kiszámolható. Ezzel a rendszer teljes dinamikai viselkedése megismerhető. Erre még majd az Elektrodiamikában visszatérünk.

Az oszcillátor példájánál maradva a $\tilde{G}(\tilde{\omega}) = G'(\tilde{\omega}) + iG''(\tilde{\omega})$ felbontásra a következőket kapjuk

$$G'(\tilde{\omega}) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}$$

$$G''(\tilde{\omega}) = \frac{k\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}$$



34.ábra