

III. Kontaktusok tulajdonságai és számítógépes modellezés

4. előadás:

Hertz-kontaktus; ütközés

Budapest, 2006. szeptember 28.

Rugalmasságtan emlékeztető

n Deformációs energia, energiasűrűség:

$$\Phi = \int j \, dV$$

n Feszültségtenzor, deformációtenzor:

$$S_{ij} = \frac{\partial j}{\partial u_{ij}}$$

n Hooke-törvény: $S_{ij} = C_{ijkl} u_{kl}$

n Köbös szimmetriájú anyagban:

$$C_{1122} \quad C_{1212} \quad C_{1111}$$

n **Amorf anyagban**
(folytonos forgásszimmetria):

$$C_{1122} = l \quad C_{1212} = m \quad C_{1111} = l + 2m$$

Lamé-féle
állandók

$$m = \frac{E}{2(1+s)}$$

← Young-modulus

← Poisson-szám

$$l = \frac{Es}{(1-2s)(1+s)}$$

Hertz-kontaktus

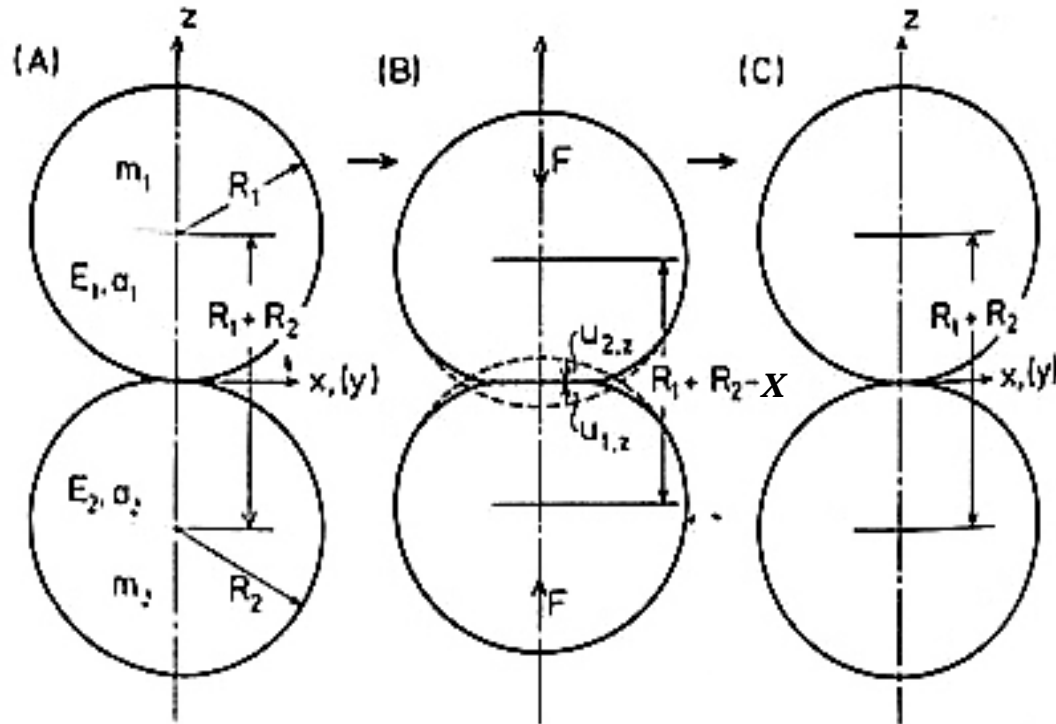


Fig. 1. Deformation of two compressed spheres. The collision proceeds as (A)→(B)→(C).

$$\begin{cases} z_1 = C_{1ab} x_a x_b \\ z_2 = C_{2ab} x_a x_b \end{cases}$$

kényszerfeltétel:

$$(z_1 + u_{1z}) + (z_2 + u_{2z}) = X$$



koordinátaválasztás

$$Ax^2 + By^2 + u_{1z} + u_{2z} = X$$

$$u_z = \frac{1+s}{2pE} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left\{ 2(1-s)F_z + (1-2s) \frac{1}{r} (xF_x + yF_y) \right\}$$

$$u_{1z} = \frac{1-s_1^2}{pE_1} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy'$$

$$u_{2z} = \frac{1-s_2^2}{pE_2} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy'$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1-s_1^2}{E_1} + \frac{1-s_2^2}{E_2} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = x - Ax^2 - By^2$$

$$\iint \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' = \frac{pab}{2} \int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} \right)}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}} ds$$

$$u_z = \frac{1+s}{2pE} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left\{ 2(1-s)F_z + (1-2s) \frac{1}{r} (xF_x + yF_y) \right\}$$

$$u_{1z} = \frac{1-s_1^2}{pE_1} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy'$$

$$u_{2z} = \frac{1-s_2^2}{pE_2} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy'$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1-s_1^2}{E_1} + \frac{1-s_2^2}{E_2} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = x - Ax^2 - By^2$$

$$\iint \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' = \frac{pab}{2} \int_0^\infty \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} \right) \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}}$$

Következtetés: az érintkezési felület **ellipszis**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$P_z(x, y) = \text{konstans} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$x = \frac{FD}{P} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$A = \frac{FD}{P} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$B = \frac{FD}{P} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - s_1}{E_1} + \frac{1 - s_2}{E_2} \right)$$

Következtetés: az érintkezési felület **ellipszis**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2pab} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$x = \frac{FD}{p} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$A = \frac{FD}{p} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$B = \frac{FD}{p} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}$$

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \mathbf{s}_1}{E_1} + \frac{1 - \mathbf{s}_2}{E_2} \right)$$

Eredmények alkalmazása két gömbre

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \qquad a = b = F^{1/3} (Dr)^{1/3}$$

$$x = F^{2/3} \left(\frac{D^2}{r} \right)^{1/3}$$

$$F = x^{3/2} \left(\frac{r}{D^2} \right)^{1/2}$$

$$U = \frac{2}{5} x^{5/2} \left(\frac{r}{D^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Dinamika: centrális ütközés (rugalmas eset)

n Ütközési paraméter: $(\mathbf{g}^N)' = -e^N \mathbf{g}^N$

n Erőtörvény \rightarrow mozgásegyenlet:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{5}{4} k \mathbf{x}^{3/2} = 0$$

$$k = \frac{4}{5} \left(\frac{r}{D^2} \right)^{1/2}$$

Kiterjesztés disszipatív ütközésre

$$P = P_{(el)} + P_{(dis)}$$

„Disszipatív Hooke-törvény”: $S_{ij}^{(dis)} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

$$\dot{W} = \frac{D'}{p} \iint \frac{P_{(dis)}(x', y')}{r} dx' dy'$$

$$P_{(dis)}(x, y) = a \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}$$

$$F_{(dis)} = \iint P_{(dis)}(x', y') dx' dy' \Rightarrow a = \frac{F_{(dis)}}{2pa^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{F_{(dis)} D'}{2p^2 a^2} \iint \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2}{a^2}}} dx' dy' = \dots = \frac{F_{(dis)} D'}{2a}$$

$$F_{(dis)} = \frac{5}{2} k' x^{1/2} \ddot{x}$$

n A mozgásegyenlet:

$$m \ddot{x} + \frac{5}{2} k' x^{1/2} \ddot{x} + \frac{5}{4} k x^{3/2} = 0$$



Dimenziótlanítás

n Új, dimenziótlan paraméterek: x és t

$$X = X_{\max} x \qquad t = \frac{X_{\max}}{v_0} t$$

n Ezekkel a mozgásegyenlet:

$$\gamma + g x^{1/2} + \frac{5}{4} x^{3/2} = 0$$

ahol γ anyagi állandó:

$$g = 2 \left(\frac{5}{4} \right)^{3/5} \frac{D^{3/5}}{D'} \left(r \frac{v}{m^2} \right)^{1/5}$$

Ütközési paraméter a modell alapján

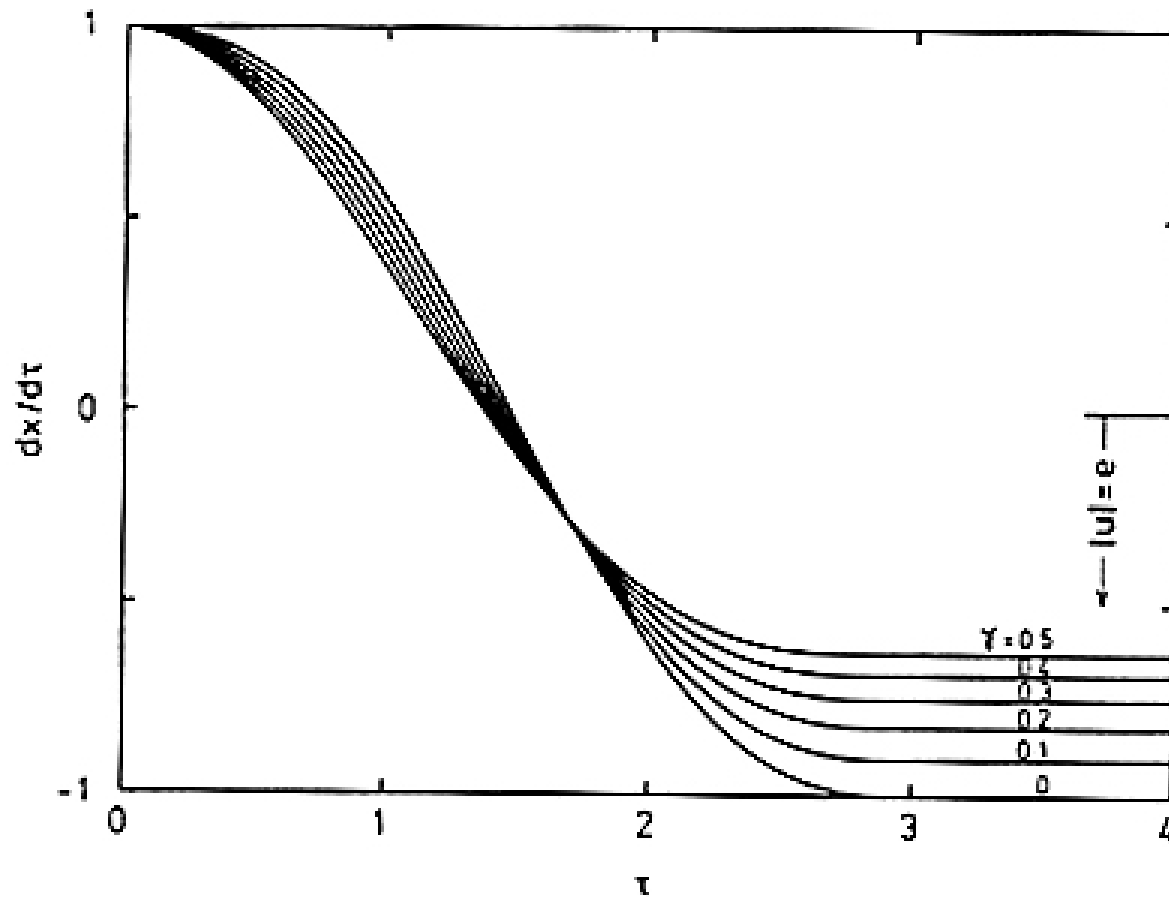


Fig. 2. Reduced relative velocity against reduced collision time.

Közelítés $e \approx 1$ -re

Perturbációs számítás: a mozgás súrlódással \approx rugalmas ütközés

$$m\ddot{x} + g x^{1/2} (\dot{x})^2 + \frac{5}{4} x^{3/2} \dot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} x^{5/2} \right] = -g x^{1/2} (\dot{x})^2$$

$$\int_0^{t_c} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} x^{5/2} \right] dt = \int_0^{t_c} -g \left[(1 - x^{5/2}) x \right]^{1/2} dt$$

határozott integrál kiszámítása

közelítés + változcseré

$$\frac{1}{2} (u^2 - 1) = -2g \int_0^1 \underbrace{\left((1 - x^{5/2}) x \right)^{1/2}}_{\text{Beta-függvény} \rightarrow 0.5045} dx$$

Beta-függvény $\rightarrow 0.5045$

$$e = |u| \approx 1 - 1.009g$$

$$(1 - e) : v^{1/5}$$

Eredmények kísérleti ellenőrzése

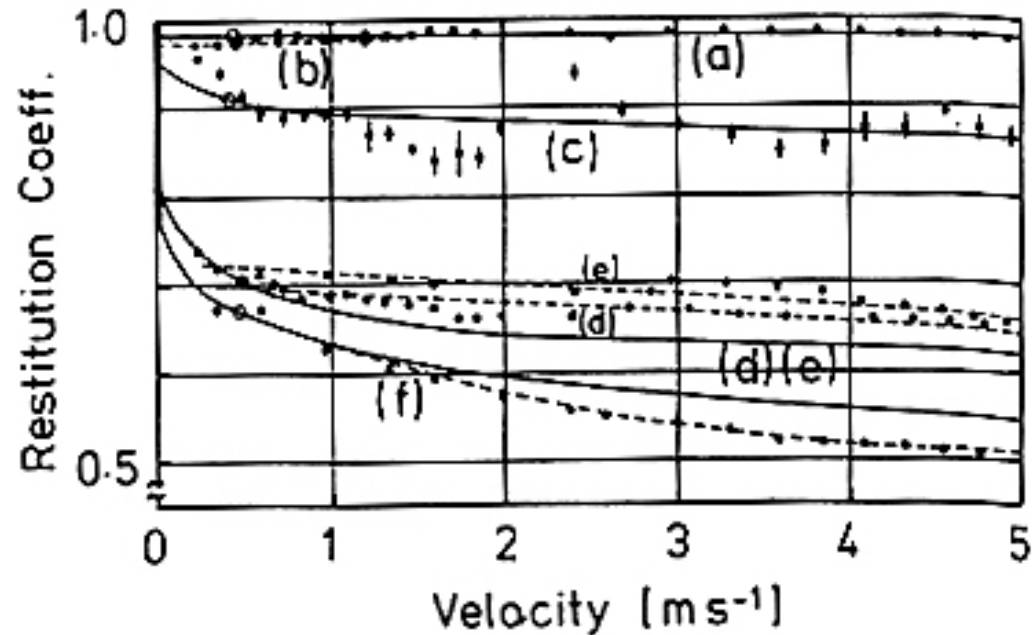


Fig. 3. Velocity dependence of restitution coefficient. Dashed curves show the measured values and solid curves the calculated results. (1) Collision between steel spheres, $m=154$ gr, $R=1.65$ cm; (b) glass spheres, $m=33.3$ gr, $R=1.96$ cm (fractured at high velocity); (c) brass spheres, $m=119$ gr, $R=1.50$ cm (plastic deformation occurred at high velocity); (d) cork spheres, $m=31.7$ gr (with a lead core), $R=1.66$ cm; (e) glass and cork spheres; (f) steel sphere and cork plate (1 cm thick and backed by a heavy iron block).

Nemcentrális ütközés

n Ütközési számok

$$(\mathbf{g}^N)' = -e^N \mathbf{g}^N \quad 0 \leq e^N \leq 1$$

$$(\mathbf{g}^T)' = e^T \mathbf{g}^T \quad -1 \leq e^T \leq 1$$

n Relatív sebesség:

$$\mathbf{g}_{12} = (\mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times R_1 \mathbf{n}) - (\mathbf{v}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \times R_2 \mathbf{n})$$

n Mozgásegyenlet:

$$\dot{\mathbf{g}}_{12} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m} + \left(\frac{1}{m_1 \hat{\Theta}_1} + \frac{1}{m_2 \hat{\Theta}_2} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{F}_{12}) \times \mathbf{n}$$

ahol:

$$\hat{\Theta} = \frac{\Theta}{mR^2}$$

n Komponensenként:

$$\mathbf{g}^N = \frac{\mathbf{F}^N}{m}$$

$$\mathbf{g}^T = \frac{1}{mk} \mathbf{F}^T \quad \text{ahol} \quad \frac{1}{k} = 1 + \frac{m_1 \hat{\Theta}_1 + m_2 \hat{\Theta}_2}{\hat{\Theta}_1 \hat{\Theta}_2 (m_1 + m_2)}$$

n Energiavesztés:

$$\Delta Q = \frac{m}{2} (\mathbf{g}^N)^2 \left[(e^N)^2 - 1 \right] + \frac{m}{2} k (\mathbf{g}^T)^2 \left[(e^T)^2 - 1 \right]$$

$$\Delta Q = 0 \Leftrightarrow e^N = 1 \text{ és } e^T = \pm 1$$

Normál irányú mozgás

$$x(t) = R_1 + R_2 - |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|$$

n Mozgásegyenlet:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}^N(x(t))$$

n Hertz-elmélet \rightarrow erőtvény:

$$\left. \begin{aligned} F_{(el)}^N &= x^{3/2} \left(\frac{r}{D^2} \right)^{1/2} \\ F_{(dis)}^N &= \frac{5}{2} k' x^{1/2} \ddot{x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{megoldás} \rightarrow e^N = \frac{\ddot{x}(t_c)}{\ddot{x}(0)}$$

Eredmény kísérleti ellenőrzése

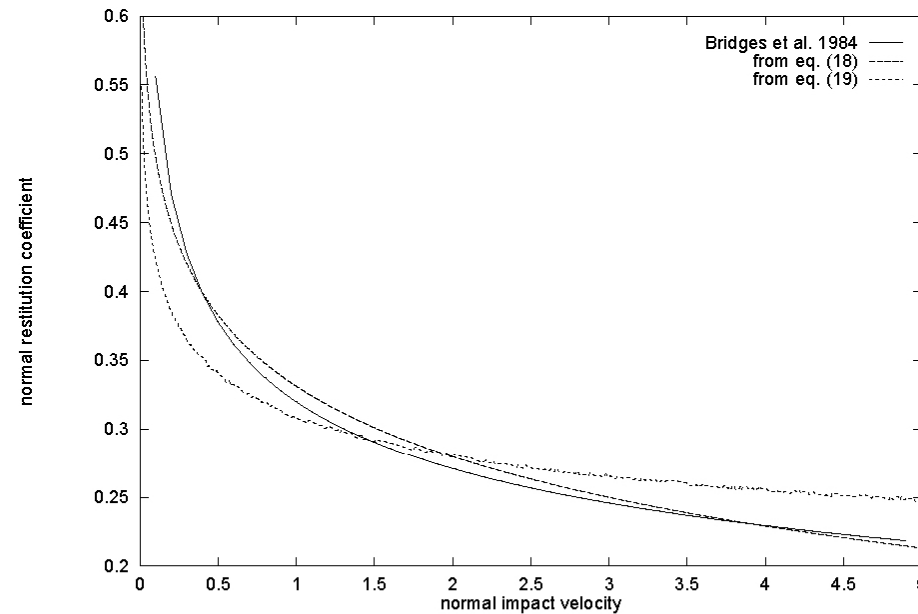


FIG. 1: The normal restitution coefficient ϵ^N versus the normal component of the impact velocity g^N measured in $cm\ s^{-1}$ according to eqs. (18) and (19). The dashed line denotes the dependence $\epsilon^N(g^N)$ measured by Bridges et al. [33]

Tangenciális irány

n Modell:

H. Czichos, *Tribology*, Elsevier, (Amsterdam, 1978.)
szerint

n Megoldandó, dimenzióatlanított egyenlet:

$$\frac{f^T S_*^T}{k} \mathbf{z}(t) \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} - \left[\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right] \right) = 0$$

n Megoldás után:

$$e^T = \frac{\mathbf{z}(t_c)}{\mathbf{z}(0)}$$

Szimulációs eredmények (a)

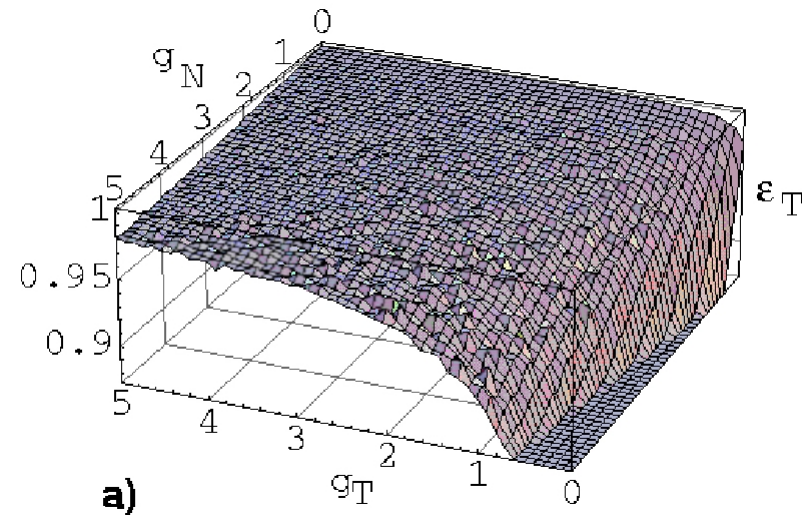


FIG. 2: The stereographic projection of the tangential restitution coefficient ϵ^T versus the plane g^N-g^T of the tangential and normal components of the impact velocity. The three parts of the figure belong to different values of the “size” of the asperities: (a) $\zeta_0 = 10^{-7} R^{eff}$, (b) $\zeta_0 = 2 \cdot 10^{-4} R^{eff}$, (c) $\zeta_0 = 10^{-3} R^{eff}$.

Szimulációs eredmények (b)

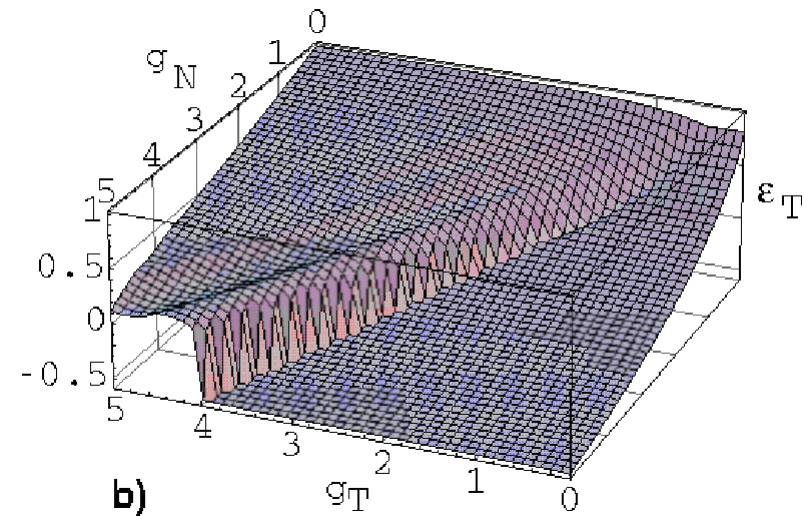


FIG. 2: The stereographic projection of the tangential restitution coefficient ϵ^T versus the plane g^N-g^T of the tangential and normal components of the impact velocity. The three parts of the figure belong to different values of the “size” of the asperities: (a) $\zeta_0 = 10^{-7} R^{eff}$, (b) $\zeta_0 = 2 \cdot 10^{-4} R^{eff}$, (c) $\zeta_0 = 10^{-3} R^{eff}$.

Szimulációs eredmények (c)

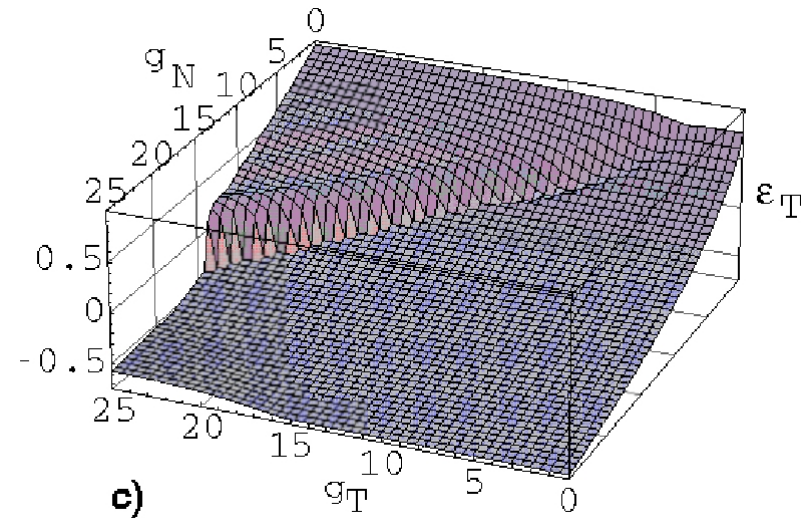


FIG. 2: The stereographic projection of the tangential restitution coefficient ϵ^T versus the plane g^N-g^T of the tangential and normal components of the impact velocity. The three parts of the figure belong to different values of the “size” of the asperities: (a) $\zeta_0 = 10^{-7} R^{eff}$, (b) $\zeta_0 = 2 \cdot 10^{-4} R^{eff}$, (c) $\zeta_0 = 10^{-3} R^{eff}$.

Összefoglalás

- Lineáris anyag + geometria =

= erőtvény

- Disszipáció bevezetése

- Centrális ütközés:

mérhető paraméterek számolása

- Nemcentrális ütközés:

szimuláció

Köszönöm a figyelmet!

Irodalom (a szemináriumi irodalomjegyzéken kívül):

- Keszthelyi Tamás: Jegyzet a mechanika tantárgyhoz
- Wikipedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Hertz_contact_stress