

Erőhálózatok szemcsés anyagokban

Szatmári Zsolt

October 19, 2006

Tartalom

Szimuláció

Erőeloszlás 2 dimenziós szemcsés rendszerekben
Kétféle módus

Kísérlet

Erőhálózatok, erők eloszlásának vizsgálata
Fotoelasztikus megjelenítés

Elmélet

A q-modell

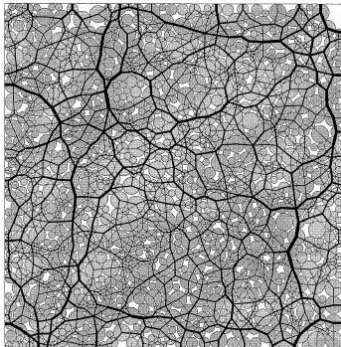
Az elrendezés

Farhang Radjai,1 Michel Jean, Jean-Jacques Moreau, and Stphane Roux. Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems Physical Review Letters Volume 77 Number 2 1996 Page 274

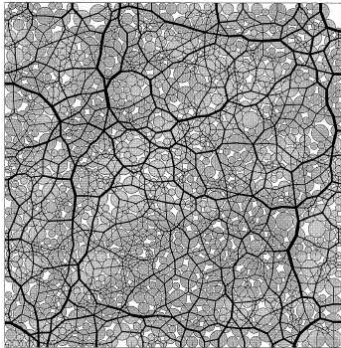
- ▶ kontaktusdinamikai (CD) szimulációk, előny: nem kell regularizálni az áthatolhatatlanságot
- ▶ Ami érdekel: P_T ; P_N
- ▶ Négy minta: 500(A), 1200(B), 4025(C), 1024(D)
- ▶ méret: egyenletes eloszlás: A,B: 3.8-7.5mm; C: 1.5-7.5mm; D: 192 db 1.6mm, 320db 1.05mm, 512db 0.65mm
- ▶ Négyzetes tároló, felülről 6600 N erő
- ▶ Súrlódási együttható: szemcse-szemcse 0.2; szemcsa-fal 0.5

A minta előkészítésére vonatkozó eljárás

- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;

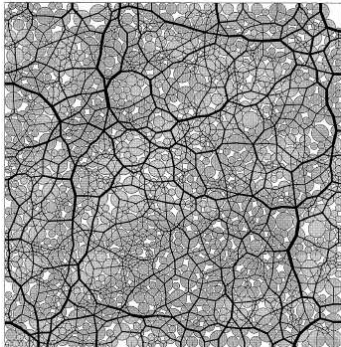


A minta előkészítésére vonatkozó eljárás



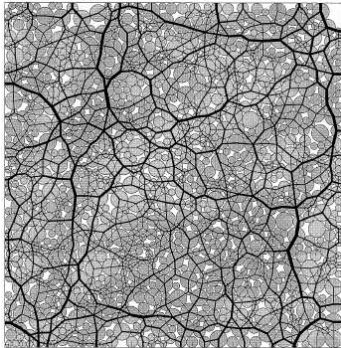
- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;
- ▶ 2. nyírás az alap vízszintes mozgatásával (ez tágulást okoz)

A minta előkészítésére vonatkozó eljárás



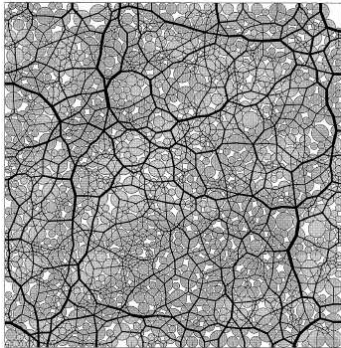
- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;
- ▶ 2. nyírás az alap vízszintes mozgatásával (ez tágulást okoz)
- ▶ 3. A felső erő alkalmazása

A minta előkészítésére vonatkozó eljárás



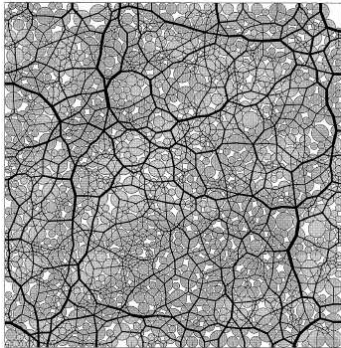
- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;
- ▶ 2. nyírás az alap vízszintes mozgatásával (ez tágulást okoz)
- ▶ 3. A felső erő alkalmazása
- ▶ 4. Gravitáció kikapcsolása

A minta előkészítésére vonatkozó eljárás



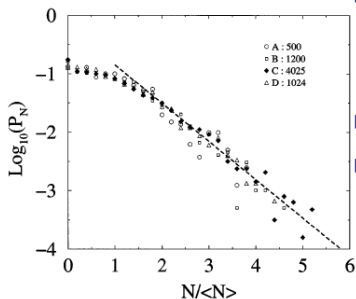
- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;
- ▶ 2. nyírás az alap vízszintes mozgatásával (ez tágulást okoz)
- ▶ 3. A felső erő alkalmazása
- ▶ 4. Gravitáció kikapcsolása
- ▶ 5. A nyugalmi állapot kivárása

A minta előkészítésére vonatkozó eljárás



- ▶ 1. gravitáció mellett a doboz megtöltése;
- ▶ 2. nyírás az alap vízszintes mozgatásával (ez tágulást okoz)
- ▶ 3. A felső erő alkalmazása
- ▶ 4. Gravitáció kikapcsolása
- ▶ 5. A nyugalmi állapot kivárása
- ▶ A képen láthatóhoz hasonló eredményt kapunk.
- ▶ Az erők 0.003N-től 1127N -ig, 6 nagyságrenden át
- ▶ $\langle N \rangle = 249N$. A kontaktusok több mint 60% -a kisebb mint az átlag

Normális erők

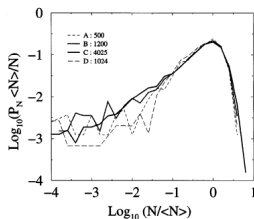


- ▶ A négy rendszerre ugyanazt tudjuk illeszteni:

$$P_N \propto \begin{cases} (N/\langle N \rangle)^\alpha, & N < \langle N \rangle, \\ e^{\beta(1-N/\langle N \rangle)}, & N > \langle N \rangle. \end{cases}$$

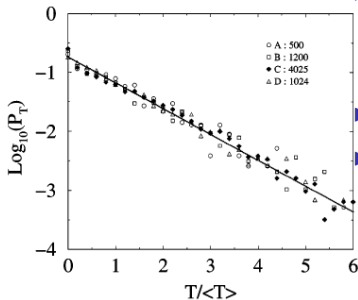
- ▶ $\alpha = -0.3$; $\beta = 1.4$

- ▶ Ugyanakkor alacsony N -ekre ez már nem áll



következtetés:
nagy erők
lebontása
kicsikre
egyenletes
méreteloszlásnál
jobb

Tangenciális erők

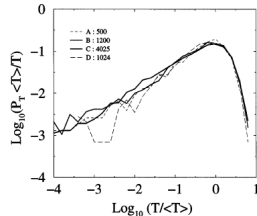


- ▶ A négy rendszerre ugyanazt tudjuk illeszteni:

$$P_T \propto \begin{cases} (T/\langle T \rangle)^{\alpha'} & T < \langle T \rangle, \\ e^{\beta'(1-T/\langle T \rangle)} & T > \langle T \rangle. \end{cases}$$

- ▶ $\alpha' = -0.5$; $\beta' = 1$

- ▶ Alacsony T -kre ez sem áll



Értékelés

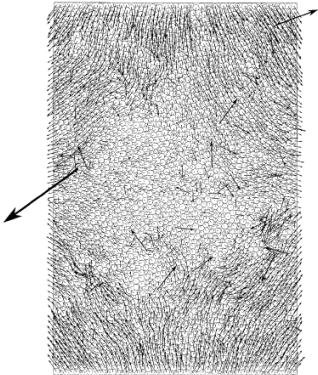
- ▶ Több részecske használata nem adna más eredményt, csak javítana a statisztikán
- ▶ A **normális** erők exponenciális része, ami a kapcsolatok 40%-a ezekben a szimulációkban, kísérletileg igazolt, a többi viszont nem, mivel nehéz mérni
- ▶ Valószínűleg csak a nagy erőkre jó a kapott eloszlás
- ▶ az α és a α' exponensek valószínűleg függenek a súrlódási együtthatótól

Újabb numerikus tesztek

Farhang Radjai,1 Dietrich E. Wolf, Michel Jean, and Jean-Jacques Moreau. Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings Physical Review Letters Volume 80 Number 1 1997 Page 61

- ▶ Ismét két dimenzió, merev gömbök, kontaktdinamika
- ▶ Figyelembe vesszük a szerkezet anizotrópiáját és az erők nem homogén voltát
- ▶ Az alapgondolat: Belső változókat mint például geometriai anizotrópia kontaktusok egy alcsoportjára (pl. adott F) kiértékelni
- ▶ Egy adott ξ nél kisebb erő értékeket figyelünk: „ ξ -hálózat”, ezt variáljuk

Elrendezés



- ▶ 4012 részecske, 3.8mm és 7.5mm között egyenletes eloszlás
- ▶ A minta kezdetben izotróp erőhálózatú állapotba van preparálva
- ▶ nincs gravitáció, súrlódás: részecske-részecske 0.5, fallal nincs
- ▶ Biaxiális összenyomás: plafon konstans 1cm/s sebességgel mozog lefele, a baloldali fal mozoghat, 500N összetartó erő hat rá

geometriai anizotrópia

- ▶ Az alábbi feszültségarány $Q = 0.18$ értékeinél vizsgáldtak:

$$Q = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{11} + \sigma_{22}} \right)$$

- ▶ $E(\theta, \xi)$: annak valószínűsége, hogy adott irányban találunk a ξ -hálózatban kontaktust
- ▶ Fourier sorfejtés:

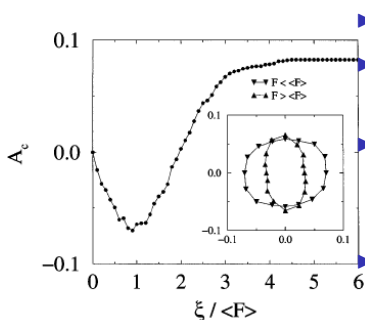
$$E(\theta, \xi) \approx \frac{1}{2\pi} (1 + A_c(\xi) \cos 2[\theta - \theta_c(\xi)])$$

Ekkor A_c meghatározza az anizotrópia amplitúdóját, θ_c pedig a fő irányt

- ▶ Def: Szerkezeti tenzor (fabric tensor) $\Phi = \langle n_i n_j \rangle$, n_i az egységvektor kontaktusirányba eső része. az átlagolás a ξ hálózatra történik

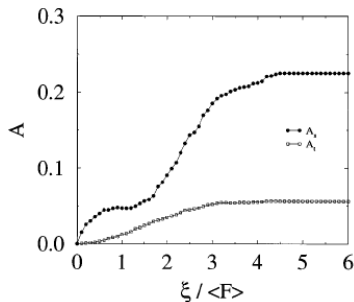
- ▶ Pozitív A_c az összenyomás irányával párhuzamos, negatív merőleges
- ▶ Belátható, hogy $A_c = 2(\Phi_1 - \Phi_2)$, ahol Φ_i a szerkezeti tenzor sajátértékei. θ_c és $\theta_c + \pi/2$ a sajátvektorok iránya

az erős és a gyenge



- ▶ Az egész hálózat anizotrópiája $A_c(\infty)$
- ▶ a ξ hálózat komplementerének izotrópiája $A_c(\infty) - A_c(\xi)$.
- ▶ $A_c < 0$, azaz az anizotrópia ortogonális az összenyomásra kis erőkre. ennek $\langle F \rangle$ -nél van szélsőértéke
- ▶ Tehát a nagy (átlagnál nagyobb) erők inkább párhuzamosan szeretnek állni
- ▶ Ahogy a kis képen látható, az erős hálózat anizotropikusabb mint a gyenge, így - habár az erős kevesebb mint 40% -ot tesz ki - túlkompenzálja a másikat

mechanikai anizotrópia



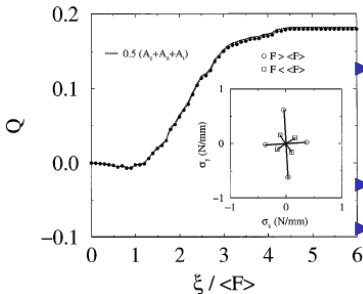
- ▶ Tangenciális, normális erők

$$F_n = (\langle F \rangle / 2\pi) \{1 + A_n(\xi) \cos 2[\theta - \theta_f(\xi)]\}$$

$$F_t = (\langle F \rangle / 2\pi) A_t(\xi) \sin 2[\theta - \theta_f(\xi)]$$

- ▶ a számolás hasonló lineáris algebrai megfontolásokkal
- ▶ az átlagnál mindkét A -nak inflexiós pontja van, A_n ezt követően kezd el erőteljesen nőni

feszültségárránnyal való összefüggés

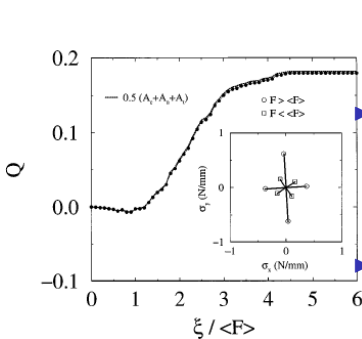


- ▶ Tudjuk, szemcsés anyagoknál kvázisztatikus esetben: $\langle \sigma_{ij} \rangle = \rho \langle F_i d_j \rangle$.
- ▶ ρ a kontaktussűrűség; d a kontaktusban részt vevő szemcsék középpontját összekötő szakasz, ez esetben $\mathbf{d} = d\mathbf{n}$
- ▶ F felbontható a két összetevőre.
- ▶ d és F közötti korrelációt elhanyagolva, levezethető:

$$Q(\xi) = \frac{1}{2}[A_c(\xi) + A_n(\xi) + A_t(\xi)]$$

- ▶ leolvasható: a Q nyírófeszültség átlagnál kisebb erőkire elhanyagolható. a geometriai

feszültségárránnyal való összefüggés



$$Q(\xi) = \frac{1}{2}[A_c(\xi) + A_n(\xi) + A_t(\xi)]$$

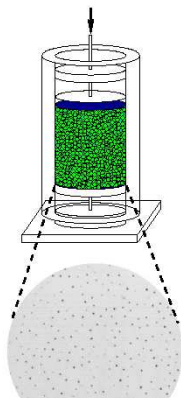
- ▶ leolvasható: a Q nyírófeszültség átlagnál kisebb erőkre elhanyagolható. a geometriai és a mechanikai anizotrópiák ekkor kiegyenlítik egymást.
- ▶ A kis erős háló olyan mint egy köztes folyadék, a nagy pedig a szilárdságot adja
- ▶ (kis kép: feszültségtenzor sajátirányai)

A kísérleti elrendezés

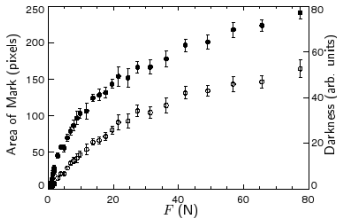
Daniel M. Mueth, Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel. Force Distribution in a Granular Medium

arXiv:cond-mat/9902282 v1 22 Feb 1999

- ▶ Indigópapíros technika
- ▶ A gyöngyök egy 140 mm belső átmérőjű, 140mm magas akril hengerben vannak
- ▶ A felső és alsó felületeket jól záró dugattyúk képezték, melyek 2.5 cm akril korongok volta, acélrudakhoz erősítve
- ▶ 7600 N erővel hatottak a felső felületre (uniaxiális összenyomás)

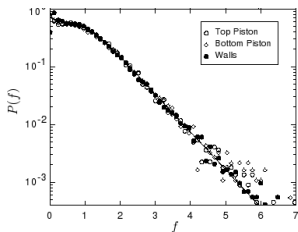


Kalibráció



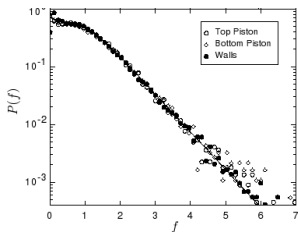
- ▶ Színes másolópapírt használtak, (simaság, vastagság, egyenleteség)
- ▶ Gondos szétszerelés után síkágys szkennerrel számítógépre vitték
- ▶ A lenyomat mérete, illetve a sötétség valamilyen, remélhetőleg monoton függvénye
- ▶ A kalibrációt egy darab gyönggyel végezték el, ismert erőkkel
- ▶ Ezzel a technikával 0.8N és 80N között tudtak mérni, 15 % -nál kisebb hibával
- ▶ Kalibráció után az erőket interpolációval állapították meg

Normálás



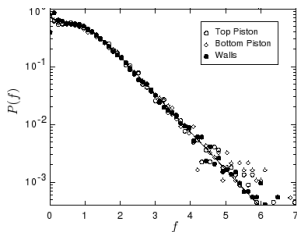
- ▶ $f = F/\bar{F}$ dimenziótlan erő eloszlását vizsgáljuk

Normálás



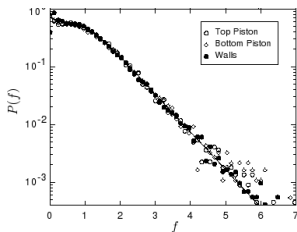
- ▶ $f = F/\bar{F}$ dimenziótlan erő eloszlását vizsgáljuk
- ▶ \bar{F} tehát fontos mennyiség, de probléma: nem tudjuk, hány szem ad 0.8N-nál kisebb járulékot

Normálás



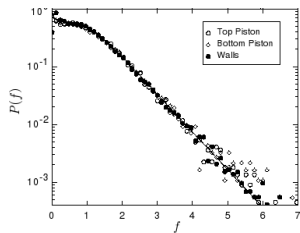
- ▶ $f = F/\bar{F}$ dimenziótlan erő eloszlását vizsgáljuk
- ▶ \bar{F} tehát fontos mennyiség, de probléma: nem tudjuk, hány szem ad 0.8N-nál kisebb járulékot
- ▶ Megoldás: Kétoldalú ragasztószalaggal mérték a felületre eső összes gyöngyöt

Normálás



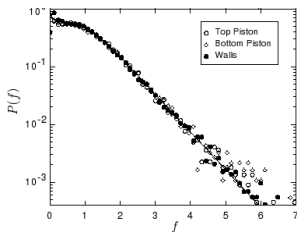
- ▶ $f = F/\bar{F}$ dimenziótlan erő eloszlását vizsgáljuk
- ▶ \bar{F} tehát fontos mennyiség, de probléma: nem tudjuk, hány szem ad 0.8N-nál kisebb járulékot
- ▶ Megoldás: Kétoldalú ragasztószalaggal mérték a felületre eső összes gyöngyöt
- ▶ Fixált és mozgó falak mellett is végeztek kísérletet

Illesztés



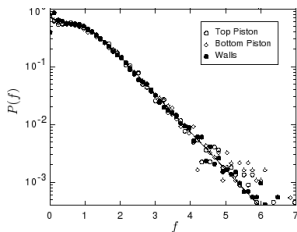
► $P(f)$ -et ábrázoljuk

Illesztés



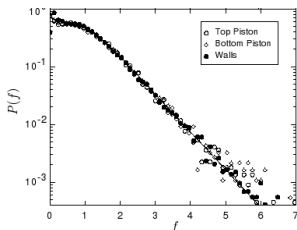
- ▶ $P(f)$ -et ábrázoljuk
- ▶ $f > 1$ mellett exponenciális: $P(f) \propto e^{\beta f}$,
 $\beta = 1.5 \pm 0.1$

Illesztés



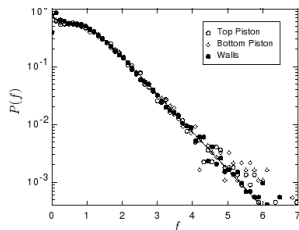
- ▶ $P(f)$ -et ábrázoljuk
- ▶ $f > 1$ mellett exponenciális: $P(f) \propto e^{\beta f}$,
 $\beta = 1.5 \pm 0.1$
- ▶ $f \approx 1$ esetén ellaposodik a görbe

Illesztés



- ▶ $P(f)$ -et ábrázoljuk
- ▶ $f > 1$ mellett exponenciális: $P(f) \propto e^{\beta f}$,
 $\beta = 1.5 \pm 0.1$
- ▶ $f \approx 1$ esetén ellaposodik a görbe
- ▶ Ahogy f 0-hoz közelít, kicsit emelkedik f értéke

Illesztés



- ▶ $P(f)$ -et ábrázoljuk
- ▶ $f > 1$ mellett exponenciális: $P(f) \propto e^{\beta f}$,
 $\beta = 1.5 \pm 0.1$
- ▶ $f \approx 1$ esetén ellaposodik a görbe
- ▶ Ahogy f 0-hoz közelít, kicsit emelkedik f értéke
- ▶ $P(f) = a \left(1 - be^{-f^2} e^{-\beta f} \right)$,
 $a = 3, b = 0.75, \beta = 1.5$

Kapcsolat a szimulációs eredményekkel

- ▶ Az exponenciális farok jól egyezik
- ▶ A kísérletekben nem látható a 0-beli divergens szimulációs eredmény ($f^{-\alpha}$, $\alpha > 0$)

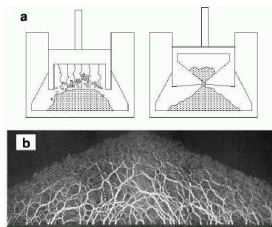
Kapcsolat a szimulációs eredményekkel

- ▶ Az exponenciális farok jól egyezik
- ▶ A kísérletekben nem látható a 0-beli divergens szimulációs eredmény ($f^{-\alpha}$, $\alpha > 0$)
- ▶ Mégis azt mondhatjuk, jó az egyezés, hiszen α kicsi, a kísérletekben pedig $f = 0.001$ -ig tudtak lemenni

Módszer

Junfei Geng, Emily Longhi, and R. P. Behringer. *Memory in 2D heap experiments* arXiv:cond-mat/0109289 v2 3

Apr 2003

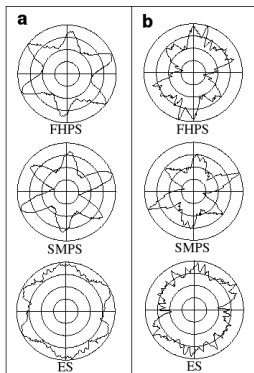


- ▶ 2 képet csináltak minden elrendezésről:
- ▶ Polariméter nélkül: a szemcsék helye, a kontaktusok szöge
- ▶ Polariméterrel az erőkről jelenítettek meg információt

A polariméteres technika elve

- ▶ A világos régiók lokálisan nagy erőt jelentenek
- ▶ Minél nagyobb az erő, annal gyakrabban váltják egymást a világos és sötét tartományok
- ▶ definíció $G = |\nabla I|^2$, ez tudja azt, hogy $\langle G \rangle$ nő a kontakt erővel
- ▶ Kalibrálni kell vagy kevés részecské oldalról ismert erővel nyomásával, vagy egy nagy téglatest alakú mintán felülről erő kifejtéssel

Eredmény



- ▶ Korábban már szerepeltek az eredmények, melyek rávilágítottak arra, hogy függ az eloszlás, ezért csak röviden átismételjük
- ▶ FHPS: fix forrás, SMPS: lassan mozgó forrás, ES: kiterjedt forrás
- ▶ A képen átlagos legközelebbi szomszéd szögeloszlás, jobboldalt ugyanez az erőláncokra

A q modell definíciója

. N. Coppersmith, C.-h. Liu S, Majumdar, Narayan and T. A. Witten. Model for force fluctuations in bead packs
Physical Review E, Volume 55 Number 5. 1996 page 53

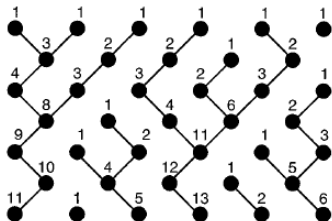
$$w(D + 1, j) = 1 + \sum_i q_{ij}(D)w(D, i) \quad (1)$$

- ▶ Csak a függőleges erőkomponenst vesszük figyelembe, feltételezve hogy a maradék beolvasztható a q változóba
- ▶ Feltételezzük, hogy vízszintes sorokra tagolhatjuk a rendszert
- ▶ Minden pont az alatta levő sorból pontosan N ponthoz csatlakozik.
- ▶ Az erők egyensúlya: $\sum_j q_{ij} = 1$
- ▶ A lényeges kérdés: $Q_D(w)$ erőeloszlás. 2 határeset!

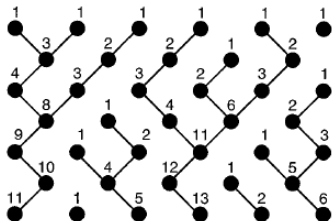
Továbbá

- ▶ Feltesszük, hogy minden i helyre egy adott q elrendezés egy $f(q)$ függvény határozza meg, mely a következő módon adódik:

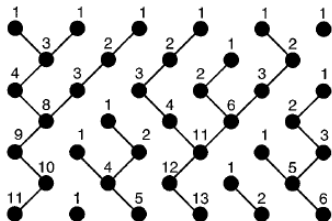
$$p(q_{i1}, \dots, q_{iN}) = \left[\prod_j f(q_{ij}) \right] \delta\left(\sum_j q_{ij} - 1\right)$$

A $q_{0,1}$ határeset

- ▶ Eme szinguláris határeset kapcsolata más modellekhez
- $D=1$ (irányított Ábeli homokdomb),
- $D=2$ (Scheidegger-féle folyóhálózat)
- $D=3$
- ⋮

A $q_{0,1}$ határeset

- ▶ Eme szinguláris határeset kapcsolata más modellekhez
 - $D=1$
 - $D=2$ (irányított Ábeli homokdomb),
 - $D=3$ Scheidegger-féle folyóhálózat)
 - ⋮
- ▶ felhasználva ezen modellek eredményeit:
 $Q_D(w) = D^{-a} g(w/D^b)$, ahol $g(x)$ tart 0-ban x^{-c} -hez

A $q_{0,1}$ határeset

- ▶ Eme szinguláris határeset $D=1$ kapcsolata más modellekhez ($D=2$ (irányított Ábeli homokdomb), $D=3$ Scheidegger-féle folyóhálózat)

⋮

- ▶ felhasználva ezen modellek eredményeit:

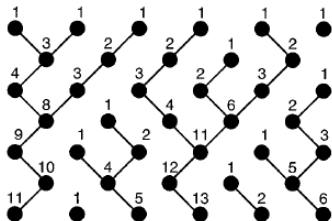
$Q_D(w) = D^{-a} g(w/D^b)$, ahol $g(x)$ tart 0-ban x^{-c} -hez

- ▶ Normálás:

$$\int_0^\infty dw Q_D(w) = 1, \text{ illetve}$$

$$\int_0^\infty dw w Q_D(w) = D \Rightarrow a = bc,$$

$$1 + a = 2b, \text{ egy exponens marad}$$

A $q_{0,1}$ határeset

- ▶ Eme szinguláris határeset kapcsolata más modellekhez
- $D=1$ (irányított Ábeli homokdomb),
- $D=2$ (Scheidegger-féle folyóhálózat)
- $D=3$
- ⋮

- ▶ felhasználva ezen modellek eredményeit:

$$Q_D(w) = D^{-a} g(w/D^b), \text{ ahol } g(x) \text{ tart } 0\text{-ban } x^{-c}\text{-hez}$$

- ▶ Normálás:

$$\int_0^\infty dw Q_D(w) = 1, \text{ illetve}$$

$$\int_0^\infty dww Q_D(w) = D \Rightarrow a = bc,$$

$$1 + a = 2b, \text{ egy exponens marad}$$

- ▶ $d = 2 = \nu$ $b = 3/2,$

Távol a kritikusságtól

- ▶ Nagy D esetén a normált erő ($v = w/D$) eloszlása tart egy D -től független eloszlásra, az előbbi határesetben az erőre volt ez igaz
- ▶ Nem kapunk többé hatványfüggvényt, az exponenciális a tipikus

Mean Field eredmények

- ▶ Általában a w a szomszédos helyeken nem független. MF: elhanyagoljuk a korrelációkat
- ▶ Egyenletes eloszlás esetén erőkre:

$$P_N(v) = \frac{N^N}{(N-1)!} v^{N-1} e^{-Nv}$$

- ▶ általános folytonos q eloszlások olyan $P(v)$ -re vezetnek, mely aszimptotikusan v tart ∞ hez esetben $v^{N-1} e^{-Nv}$, és 0-ban v^{N-1} -vel arányosak (van megszorítás, de általában teljesül)

szinguláris eset

- ▶ A valósággal való összehasonlítás végett célszerű olyan q eloszlást venni, aminél véges valószínűséggel 0 valamely q_{ij} .
- ▶ q eloszlásában lesz egy Dirac delta, amely nem felel meg az eddigi esetnek
- ▶ a hatványkitevő lehet $-3/2$, vagy $-(1 + \frac{1}{m})$, ahol $N \geq m \geq 2$

A Mean Field elméleten túl

- ▶ Belátható, hogy az egyenletes eloszlásra kapott MF eredmény egzakt minden N -re
- ▶ szemléletes kép: van korreláció a szomszédok közt, hiszen ha egy ág szülője nagy terhet örökölt, akkor feltehetőleg a testvér is. Vagyis valószínűleg azok a szemcsék amelyek közel vannak nyugszik, közel vannak
- ▶ antikorrreláció: $\sum_j q_{ij} = 1$.
- ▶ Egyenletes eloszlásnál a két hatás kiejti egymást
- ▶ De nem csak akkor, hanem $f(q_{ij}) = q^r$ véges készlet elemeiél mind jó a MF!

Kapcsolat a kísérletekkel

- ▶ Összefoglalásképp azt mondhatjuk, hogy a modell a erőinhomogenitások exponenciális lecsengését jósolja nagy erőknél, mely egybecseng a kísérletekkel, mint azt láttuk

Köszönöm a figyelmet!