

BME, Szemcsés anyagok

Elméleti és szimulációs rész

Unger Tamás

Szemcsés anyagok bevezető

Szemcsés anyag: sok makroszkopikus szilárd részecske.

Szemcsés anyagból álló gáz nagyon másképp viselkedik, mint a molekulák alkotta gázok. Pl. mechanikai energia elveszik, klaszterképződés (csomósodás). Mi a különbség?

Statisztikus fizika nézőpontjából

Szemcsék makroszkopikus objektumok. Következmény:

- 1) nagy tömeg,
- 2) belső szabadsági fokok nagy száma

1db homokszemre vonatkozó tipikus paraméterek:

méret $100\mu m$

kísérletekben jellemző sebességek: cm/s

tömeg: $M = \rho * V \approx 5000kg/m^3 * (10^{-4}m)^3 = 5 * 10^{-9}kg$

jellemző kinetikus energia $E_{kin} = Mv^2/2 \approx 5 * 10^{-9}kg * (10^{-2}m/s)^2 = 5 * 10^{-13}J$

Mekkora energia kell ahhoz, hogy egy homokszemet felemeljünk és ráadjuk egy másik homokszem tetejére? A potenciális energia megváltozása: $\Delta E_{pot} = Mgh \approx 5 * 10^{-9}kg * 10m/s^2 * 10^{-4}m = 5 * 10^{-12}J$

termális energia $k_B T = 1.38 * 10^{-23}J/K * 300K \approx 5 * 10^{-21}J$

$k_B T \ll \Delta E_{pot}, E_{kin}$

A termális energia 8-9 nagyságrenddel kisebb annál, mint ami érdemben mozgásba hozhatná a homokszemeket.

Következmény:

- 1) a termális gerjesztés elhanyagolható. $T = 0$
- 2) Disszipatív kölcsönhatás. Belső szabadsági fokok elnyelik a rendszerbe pumpált mechanikai energiát.

Külső gerjesztés nélkül a mozgás leáll, a só leül a sótartó aljára. Gondolhatnánk, hogy ez megfelel a rendszer alapállapotú energiájának a $T = 0$ hőmérsékletnek megfelelően. Ez nem így van. A kapott konfiguráció energiája nem felel meg a termális egyensúlynak, annál magasabb. A viselkedés emlékeztet az üvegekre: hűtés során a rendszer csapdába esik egy olyan konfigurációban, ami a konfigurációk terében az energia lokális minimumának felel meg (metastabil konfiguráció), nem globálisnak.

Ez jól szemléltethető azonos méretű gömbökből (pl. kis fémgolyókból) álló szemcsés anyaggal. Ismert, hogy az elérhető legsűrűbb elrendezés egy szabályos kristályrács (hexagonális vagy lapcentrált köbös). Az ehhez tartozó térkitöltés, pontosabban térfogati hányad

$$\Phi_{\max} = \Phi_{\text{FCC}} \approx 0.74 , \quad (1)$$

ahol a térfogati hányadot (ang.: solid fraction) a következőképpen definiáljuk:

$$\Phi = V_{\text{szemcsék}} / V_{\text{szemcsék} + \text{a köztük lévő rések}} . \quad (2)$$

A makroszkopikus golyókból álló szemcsés anyagra nézve a kísérletek azt mutatják, hogy a statikus állapot térfogati hányada két érték között lehet:

$$\Phi_{\min} = \Phi_{\text{RLP}} \approx 0.56 , \quad (3)$$

$$\Phi_{\max} = \Phi_{\text{RCP}} \approx 0.64 . \quad (4)$$

Ezek a véletlen laza (random loose packing) és a véletlen szoros (random close packing) pakolásnak felelnek meg. Véletlen laza pakolásnál ritkább anyag nem stabil, nem tud ellenállni semmilyen nyomásnak, gravitációnak. A véletlen szoros pakolásnál pedig nem akar az anyag sűrűbb elrendezést felvenni. Itt öntés, nyomás, ütögetés, rázás, olajozás nem segít. Az anyag magától nem fog kristályosodni. A golyókat egyenként a helyükre téve persze felépíthető egy kristályrács, de úgy tűnik, hogy kollektív manipulációval nem lehet az anyagot a Φ_{RCP} határnál jobban sűríteni.

A tárolóedénybe öntött anyag sűrűsége ennek megfelelően sokkal kisebb, mint Φ_{FCC} . Az egész anyag (minden egyes golyó) mechanikai egyensúlyban van, de az összesített potenciális energia nagyobb, mint ami az alapállapotban lenne. (Mivel a rendszer súlypontja magasabban helyezkedik el az elméletileg elérhető minimumnál.)

Megjegyzés: Érdekes, hogy a két- és a háromdimenzió nagyon másképp viselkedik a kristályosodás szempontjából. Azonos sugarú korongokból álló kétdimenziós rendszerben spontán megjelennek háromszögű szerkezetű (a legsűrűbb elrendezésnek megfelelő) tartományok.

Statisztikus fizikában láttuk: nagy számú részecske, sokaságátlag, éles eloszlások, jól meghatározott paraméterek (energia, nyomás, térfogat stb).

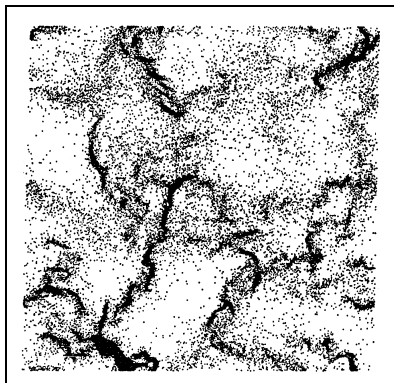
Szemcsés anyagnál a csapdába esés (sok nagyon különböző metastabil állapot) következménye: reprodukálhatóság és a mérnöki tervezés nehéz (megismételt kísérlet más eredményt mutat). Memóriaeffektusok, makroszkopikus paraméterek előletről való erős függése.

Disszipatív gáz, csomósodás

A szemcsék között a kölcsönhatás tehát disszipatív. Ütközés:

$$v_{\text{out}} = -rv_{\text{in}} , \quad (5)$$

ahol r a restitúciós együttható (vagy ütközési paraméter) $0 \leq r < 1$, ezt gyakran állandónak tekintik az elméleti leírások és a számítógépes szimulációk. (r , főleg kis sebességeknél, erősen sebességfüggő lehet. Erről később lesz még szó.) v_{in} és v_{out} a kétrészecskés ütközésnél jelenti a kontaktusfelületek ütközés előtti és ütközés utáni normális irányú sebességét.



1. ábra:

Az ábrán látható idealizált esetben a kezdeti feltételtől eltekintve nincs energia bevitel (szimuláció [Goldhirsch,PRL93]). A disszipatív gázból álló gravitációmentes, zárt rendszer magára hagyva lehül. A közönséges gázokkal ellentétben a homogén sűrűség itt instabil, a dinamika során sűrű klaszterek jönnek létre. Az instabilitás lényege, hogy a sűrűbb tartományban gyakoriak az ütközések \rightarrow szemcsék sebessége gyorsabban csökken \rightarrow kisebb nyomás \rightarrow a környezet nagyobb nyomása miatt még jobban összesűrűsödik.

Mechanikai feszültség sűrű szemcsés anyagban

rugalmasságtan ismétlő

Egy anyagi közegben az elmozdulásmező $\vec{u}(\vec{r})$. (\vec{r} helyvektorral jellemzett pontban \vec{u} vektorral mozdul el.) Egy \vec{r}_0 centrum körül felírva az elmozdulásmezőt ($i = x, y, z$ komponensekre):

$$u_i(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) = u_i(\vec{r}_0) + \sum_j A_{ij}\Delta x_j + 1/2 \sum_{j,k} B_{ijk}\Delta x_j\Delta x_k + \dots \quad (6)$$

Ebből következik, hogy:

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{röviden:} = \partial_j u_i. \quad (7)$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix szimmetrikus és antiszimmetrikus részét célszerű külön kezelni.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{\text{sym}} + \underline{\underline{A}}^{\text{asym}} \quad (8)$$

A szimmetrikus rész a deformációs tenzor $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\varepsilon_{ij} = A_{ij}^{\text{sym}} = \frac{(\partial_j u_i + \partial_i u_j)}{2}, \quad A_{ij}^{\text{asym}} = \frac{(\partial_j u_i - \partial_i u_j)}{2} \quad (9)$$

Az antiszimmetrikus rész alakja

$$\underline{\underline{A}}^{\text{asym}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^{\text{asym}} \Delta\vec{r} = \vec{\varphi} \times \Delta\vec{r}. \quad (10)$$

Egy általános elmozdulásmező alakja tehát lineáris közelítésben:

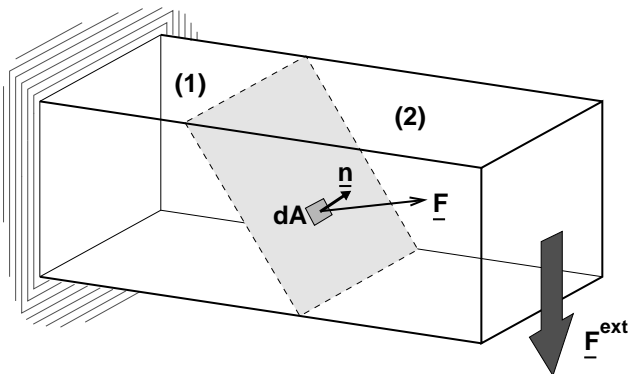
$$\vec{u}(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}_0) + \vec{\varphi} \times \Delta\vec{r} + \underline{\underline{\varepsilon}}\Delta\vec{r}. \quad (11)$$

Amennyiben kis \vec{u} elmozdulásokról van szó, akkor csak az utolsó tagnak van deformáció jelentése. Az első és második tag merev test eltolásnak ill. elforgatásnak felel meg. Az anyag egy referenciaállapothoz képesti, lokális deformációját tehát egy szimmetrikus kétindexes tenzor (3x3-as mátrix) $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{r})$ jellemzi.

A feszültségtenzor

Kontinuum kép.

Az anyagot gondolatban kettévágjuk egy felülettel. Az (1) és a (2) részről feltételezzük, hogy közöttük csak az érintkezési felületükön van kölcsönhatás valamilyen felületi erősrűsítésen (\vec{f}) keresztül. \vec{f} függ a helytől és a felület \vec{n} irányától is. Az erőegyensúly következménye, hogy az irányfüggés csak lineáris lehet. Ez a lineáris $\underline{\underline{\sigma}}$ leképezés (feszültségtenzor) jellemzi lokálisan az



2. ábra:

anyag feszültségállapotát.

$$\vec{f} = \vec{F}_{(1) \rightarrow (2)} / \Delta A \quad (12)$$

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \quad (13)$$

Itt \vec{n} a vágásfelületnek az (1)-gyel jelölt anyagból kifelé mutató normálvektora. A ΔA felületelemen történő kölcsönhatásnál természetesen két erő (erő - ellenerő) van jelen: az (1)-ről a (2)-re ható, illetve a (2)-ről az (1)-re ható. Szemcsés anyagnál az előjelkonvenció az, hogy az (1)-ről a (2)-re ható erő ($\vec{F}_{(1) \rightarrow (2)}$) alapján definiáljuk a feszültséget. Ez azért jó, mert így a szemcsés anyagra jellemző nyomófeszültség pozitív előjelű lesz. (Más területeken általában a húzás irányát veszik pozitívnak). Húzófeszültség szemcsés anyagban nincs, ill. csak speciális esetben (kohézív szemcsés anyagoknál).

Adott bázisban:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Forgatónyomaték egyensúlyból következik, hogy $\underline{\underline{\sigma}}$ szimmetrikus: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

A feszültség egy x irányú síkon (melynek a normálvektora x irányú):

$$\vec{f} = \underline{\underline{\sigma}} * \vec{n} = \underline{\underline{\sigma}} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad (15)$$

\vec{f} -et szétbontva normális és tangenciális irányú komponensekre:

$$\vec{f} = \vec{f}_n + \vec{f}_t \quad \vec{f}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ főátlóban álló elemek jelentése normálfeszültség, az átlón kívülieké nyírófeszültség.

Egy általános \vec{n} normálisú síkra ($|\vec{n}| = 1$) a normál és nyírófeszültséget így kapjuk:

$$\sigma_{\vec{n}} = \vec{n} * \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \quad \tau_{\vec{n}} = |\underline{\underline{\sigma}} \vec{n} - \sigma_{\vec{n}} \vec{n}| \quad (17)$$

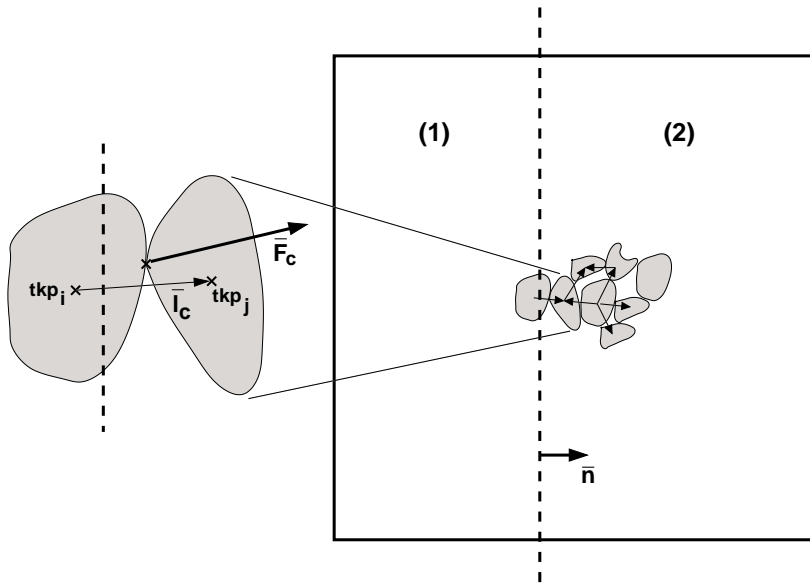
$\sigma_{\vec{n}}$ előjeltől függően \vec{n} irányú nyomást (+) vagy húzást (-) jelent, $\tau_{\vec{n}}$ pedig \vec{n} -re merőlegesen csúsztatni igyekszik a tesztfelületet.

Közönséges folyadékok feszülstégtenzora statikus (deformációmentes) esetben gömbszerű, egy paraméterrel – a nyomással (p) – jellemezhető:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (18)$$

Itt egy adott síkra számolt normál és nyírófeszültségre az adódik, hogy $\sigma_{\vec{n}} = p$ és $\tau_{\vec{n}} = 0$, függetlenül a sík orientációjától.

Az anyagnak az a képessége, hogy mozdulatlanul ellen tud állni nyírófeszültségnek, a szilárd testekre jellemző. Ilyen értelemben a szemcsés anyag képes szilárd testként



3. ábra. A mezoszkopikus doboz és a dobozt kettéosztó teszt sík.

viselkedni. Statikus nyírófeszültség kell pl. a tengerparti homokon való sétához vagy egy stabil homokdombhoz.

Minden feszültségállapothoz található olyan $[\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3]$ koordinátabázis (főtengelyrendszer), ahol a feszültségmátrix diagonális:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Kontaktuserők - feszültségtenzor kapcsolat

Ha kontinuumleírást alkalmazunk, pl. a $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r})$ térbeli feszültségeloszlásról beszélünk, akkor nagy hullámhosszú változásokra gondolunk, a mikroszkopikus méretskála ki van átlagolva. A szemcsés anyagban ébredő feszültség tárgyalásakor a szemcseméret számít mikroszkopikus hosszúságnak.

Ha azt mondjuk, hogy az anyag \vec{r} helyen $\underline{\underline{\sigma}}$ feszültségállapotban van, akkor valójában egy mezoszkopikus tartományra vett átlagos feszültségről beszélünk. Ez a mezoszkopikus tartomány kicsi az egész rendszer méreteihez képest, de elég sok szemcsét tartalmaz ahhoz, hogy az átlagolással megszabaduljunk a mikroszkopikus skálán jelenlévő fluktuációktól.

Ebben a részben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy a mikroszkopikus erőkből hogyan lehet származtatni a feszültségtenzort.

Vegyünk egy sűrű szemcsés anyagot, amit valamilyen külső terhelés (pl. gravitáció) tart össze, ezért az egyes szemcsék egymásnak nyomódnak, hosszúidejű kontaktusoknál (nem csak rövid ütközések) kontaktuserők lépnek fel. Induljunk ki abból, hogy adottak a

mikroszkopikus információk: a szemcsék helye, orientációja, a kontaktusok helye és a kontaktuserők. Vegyünk gondolatban egy mezoszkopikus méretű, téglatest alakú tartományt és határozzuk meg ebben az átlagos feszültségtenzort (3. ábra)! Egy $\vec{n} = [1, 0, 0]$ normálisú tesztsíkkal osszuk két térfogatrészre a tartományt és vizsgáljuk meg, hogy milyen erővel hatnak egymásra!

Az egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, hogy azok a szemcsék tartoznak az egyik illetve másik térrészhez, amelyeknek a tömegközéppontja az adott térrészbe esik. Az ábrán a bal- és jobboldali anyagrészek közötti kölcsönhatásban csak olyan közös kontaktussal rendelkező szemcsepárok vesznek részt, melyeknél a két szemcse különböző térrészbe esik.

Egy c indexű kontaktusnál jelölje \vec{l}_c az érintkező szemcsék tömegközéppontját összekötő vektort $\vec{l}_c = \vec{r}_j - \vec{r}_i$. A kontaktuserő \vec{F}_c legyen az i -dik szemcséről a j -dikre ható erő (3. ábra).

Ekkor a tesztsíkon (3. ábra) keresztül a jobboldali anyagra ható erő:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\{c\}'} \text{sign}(\vec{l}_c \vec{n}) \vec{F}_c. \quad (20)$$

Itt a kontaktusoknak csak arra a $\{c\}'$ részhalmazára kell összegezni, ahol a tesztsík kettévágja az \vec{l}_c vektort. Ha az \vec{l}_c vektor jobbról balra halad át a tesztfelületen, akkor \vec{F}_c a baloldali anyagrészt hat. Ilyenkor a $-\vec{F}_c$ ellenerőre van szükség a fenti összegzésben. Ezt a kontaktusiránytól függő előjelet biztosítja a $\text{sign}(\vec{l}_c \vec{n})$ tényező (a két vektor skalárszorzatának előjele).

Az $\vec{n} = [1, 0, 0]$ normálisú x_0 helyen lévő tesztsíkon ébredő feszültség tehát

$$\vec{f} = \frac{1}{L_y L_z} \sum_{\{c\}'} \text{sign}(\vec{l}_c \vec{n}) \vec{F}_c = \vec{f}(x_0), \quad (21)$$

ahol a téglatest L_y és L_z éleinek szorzata adja a felület nagyságát. A feszültség függ a tesztsík x_0 koordinátájától, de számunkra csak a mezoszkopikus tartományra vett átlag az érdekes:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \vec{f}(x) dx \quad (22)$$

Ez úgy értelmezhető, hogy párhuzamos tesztsíkok sokaságát tekintjük egyenletes sűrűséggel elosztva a doboz teljes $[0, L_x]$ hosszán. Egy c kontaktus csak a \vec{l}_c -t metsző síkoknál ad járulékot, azaz $|l_{c,x}| = |\vec{l}_c \vec{n}|$ hosszú tartományon metszi a tesztsíkokat, ezen kívül ($L_x - |l_{c,x}|$ hosszon) nem. Ezek alapján:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \left(\frac{1}{L_y L_z} \sum_{\{c\}'} \text{sign}(\vec{l}_c \vec{n}) \vec{F}_c \right) dx = \frac{1}{L_x L_y L_z} \sum_{\{c\}} (|\vec{l}_c \vec{n}| \text{sign}(\vec{l}_c \vec{n}) \vec{F}_c) \quad (23)$$

Azaz

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} \vec{F}_c (\vec{l}_c \vec{n}) \quad (24)$$

ahol az összegzés a téglatest alakú V térfogatú tartományba eső összes kontaktusra történik. Amit kaptunk, az az $\vec{n} = [1, 0, 0]$ orientációhoz tartozó átlagos feszültség, melynek k -dik komponense ($k = x, y, z$):

$$\left(\langle \vec{f} \rangle\right)_k = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} F_{c,k} l_{c,x}. \quad (25)$$

A (15) egyenlet alapján ez éppen a lokális (értsd: a mezoszkopikus tartományra vonatkozó) feszültségtenzor első oszlopát adja meg.

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_k = \sigma_{kx} = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} F_{c,k} l_{c,x}. \quad (26)$$

A fenti megfontolás ugyanígy működik y és z irányú tesztsíkokra is. A feszültségtenzor alakjára adódik, hogy

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} F_{c,k} l_{c,l}, \quad \text{azaz} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} \vec{F}_c \circ \vec{l}_c. \quad (27)$$

o a diadikus szorzatot jelöli, ami így hat egy általános irányú \vec{n} normálvektorra:

$$\underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \frac{1}{V} \sum_{\{c\}} \vec{F}_c (\vec{l}_c \vec{n}). \quad (28)$$

Térfogati erők

Mi mondható a feszültségtenzorról, ha térfogati erők $\vec{w}(\vec{r})$ (pl. tehetetlenségi erők vagy gravitáció $\vec{w}(\vec{r}) = \rho \vec{g}$) adják a külső terhelést?

Egy V térfogatú tartományra ható külső eredő erő

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \int_V \vec{w}(\vec{r}) dr^3. \quad (29)$$

Ugyanerre a tartományra a felületén (A_V) keresztül hat a környező anyag is. A két erő összege mechanikai egyensúlyban nulla:

$$\int_V \vec{w}(\vec{r}) dr^3 - \oint_{A_V} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) d\vec{A} = \vec{0}. \quad (30)$$

(A konvenciónk alapján a felületen lokálisan fellépő $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) d\vec{A}$ erő a környezetre hat, ezért kell a mínusz előjel.) Az i -dik komponensre ($i = x, y, z$):

$$\int_V w_i(\vec{r}) dr^3 = \oint_{A_V} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{r}) dA_j. \quad (31)$$

Gauss-tétel egy $\vec{u}(\vec{r})$ vektormezőre:

$$\oint_{A_V} \vec{u} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{u} dr^3, \quad (32)$$

ahol \vec{u} divergenciája $\text{div } \vec{u} = \sum_{j=1}^3 \partial_j u_j$. A $\underline{\underline{\sigma}}$ mátrix i -dik sorát vektormezőnek tekintve alkalmazhatjuk a Gauss-tételt és a felületi integrált térfogatívá alakíthatjuk:

$$\oint_{A_V} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{r}) dA_j = \int_V \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} dr^3. \quad (33)$$

Vezessük be a feszültségtenzor divergenciáját ($\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$), ami egy helyfüggő vektor és i -dik komponense az adott bázisban $(\text{div } \underline{\underline{\sigma}})_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ij}$. Ekkor

$$\int_V w_i(\vec{r}) dr^3 = \int_V \text{div } \underline{\underline{\sigma}} dr^3, \quad (34)$$

Ez minden tartományra teljesül egyensúlyban, ezért

$$\vec{w}(\vec{r}) = \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}). \quad (35)$$

Ez az egyenlet nem határozza meg egyértelműen a feszültségeloszlást az anyagban. Ugyanahhoz a forráshoz ($\vec{w}(\vec{r})$) található sokféle feszültségeloszlás. Pl. egy adott $\underline{\underline{\sigma}}_1(\vec{r})$ megoldás módosítható úgy, hogy a feszültségmátrix soraihoz hozzáadunk egy-egy forrásmentes vektormezőt és az így kapott feszültségeloszlás szintén megoldása lesz az egyenletnek.

Ténylegesen megvalósulnak különböző $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r})$ megoldások azonos geometria és $\vec{w}(\vec{r})$ terhelés esetén. Pl. ugyanabban a tárolóban más feszültségeloszlást fog mutatni a saját súlya alatt egy newtoni folyadék, egy rugalmasan deformálható szilárd test vagy egy szemcsés anyag.

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni egy adott szituációban a feszültségeloszlást, több információra van szükség, pl. egy $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}})$ vagy egy $\underline{\underline{\sigma}} = f(d\underline{\underline{\varepsilon}}/dt)$ függvénykapcsolatra, más esetekben a feszültségmátrix elemei közötti kapcsolatra vagy az anyag előéletére vonatkozó információkra.

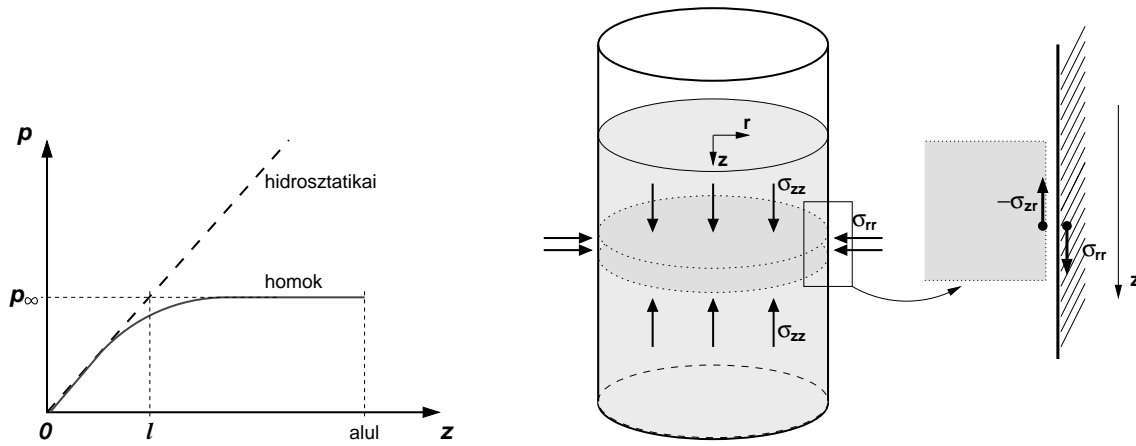
Janssen-effektus

Janssen 1895.

Tekintsünk egy vízzel töltött henger alakú tárolóedényt. A nyomás $p = \rho g z$ arányos a felszíntől mért z távolsággal, így a tároló alján mérhető nyomás mutatja a vízoszlop magasságát.

Ha a tárolót szemcsés anyaggal töltjük fel, akkor kis z mélységekre megkapjuk a z -vel arányos hidrosztatikai nyomást, de lefelé haladva a nyomás állandósul (4. ábra), ez a Janssen-effektus. Lényegesen különböző töltési magasságok vezethetnek ugyanarra a nyomásértékre a tároló alján.

Első ránézésre ez meglepőnek tűnhet, hiszen akkor mi tartja meg az anyag súlyát, ha nem a tároló alja. A válasz az, hogy az oldalfalak. A közönséges folyadékoknál tapasztalt hidrosztatikai nyomás a nyírófeszültségek hiányának következménye. A szemcsés anyag a nyírófeszültségek révén képes az oldalfalakra terhelni a saját súlyát.



4. ábra. Janssen-effektus

Janssen egyszerű modellje

Feltételezzük, hogy a szemcsés anyaggal töltött tárolóban

- (1) σ_{zz} csak a z koordináta függvénye.
- (2) A σ_{zz} függőleges nyomás oldalirányú nyomást generál egy λ csatolási tényezővel:

$$\sigma_{rr} = \lambda \sigma_{zz}. \quad (36)$$

Itt r jelöli a sugár irányú koordinátát. (λ lehet 1-től különböző, mert nem kell gömbszerűnek lennie a feszültségállapotnak.)

(3) A fal mellett egy μ súrlódási együttható és az oldalnyomás korlátozza a σ_{zr} nyírófeszültséget: $\sigma_{zr} \leq \mu \sigma_{rr}$. Továbbá, hogy súrlódás teljesen mobilizálva van (\leq helyett $=$), mert az anyag alsóbb rétegei tömörödnek a betöltés során, így minden réteg enyhén lefelé csúszva éri el a végső pozícióját.

$$\sigma_{zr} = \mu \sigma_{rr}. \quad (37)$$

Az R sugarú tárolóban a ρ tömegsűrűségű anyag egy Δz magasságú szeletére (4. ábra) felírt mechanikai egyensúly:

$$R^2 \pi \Delta z \rho g + R^2 \pi [\sigma_{zz}(z) - \sigma_{zz}(z + \Delta z)] - 2R\pi \Delta z \sigma_{zr} = 0. \quad (38)$$

A ρ mennyiség természetesen makroszkopikus tömegsűrűséget jelent, és az anyag egynél kisebb térfogati hányada miatt ρ kisebb, mint a szemcsék anyagának sűrűsége.

A csatolási tényező és a teljesen mobilizált súrlódás felhasználásával jutunk az alábbi differenciálegyenletre:

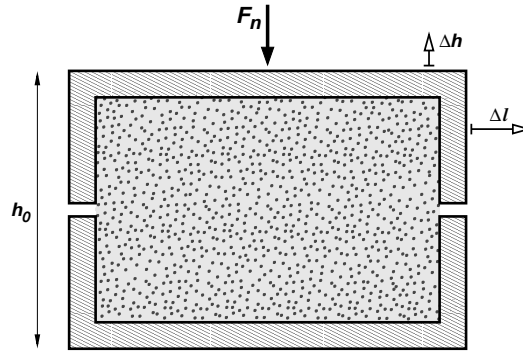
$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \rho g - \frac{2\mu\lambda}{R} \sigma_{zz}. \quad (39)$$

Bevezetve az $l = R/(2\mu\lambda)$ hosszúságot és a $p_\infty = \rho g l$ nyomást:

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \frac{p_\infty - \sigma_{zz}}{l}. \quad (40)$$

Integrálva az egyenletet kapjuk:

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} \frac{1}{p_\infty - \sigma_{zz}} = \frac{1}{l} \quad \rightarrow \quad \int \dots dz \quad \rightarrow \quad -\ln(p_\infty - \sigma_{zz}) = \frac{z}{l} + konst. \quad (41)$$



5. ábra. Közvetlen nyíraskísérlet

A megoldás alakja:

$$\sigma_{zz}(z) = p_\infty - Ce^{-z/l}. \quad (42)$$

Ha a töltési magasságnál ($z = 0$ mélység) az anyag felületén nincs terhelés, akkor a peremfeltétel $\sigma_{zz}(0) = 0$ és végeredményül az alábbi nyomáseloszlást kapjuk:

$$\sigma_{zz}(z) = p_\infty(1 - e^{-z/l}). \quad (43)$$

Látható, hogy $z \ll l$ mélységben $\sigma_{zz} \approx \rho gl(1 - (1 - z/l)) = \rho gz$ a hidrosztatikai nyomást követi, $z \gg l$ mélységben pedig $\sigma_{zz}(z) \approx p_\infty$ állandó (4. ábra). Az l karakterisztikus hossz nagyságrendileg a tároló szélessége adja.

Szemcsés anyag, mint folyadék

Tekintsük az (5). ábrán látható közvetlen nyíraskísérletet. A felső lapot vízszintesen Δl elmozdulásra kényszerítjük miközben állandó függőleges F_n erő hat rá. MÉRJÜK a függőleges Δh elmozdulást és az eltoláshoz szükséges F_t vízszintes erőt.

Az eredmény általában az, hogy a

$$\Delta l/h_0 = \gamma \quad (44)$$

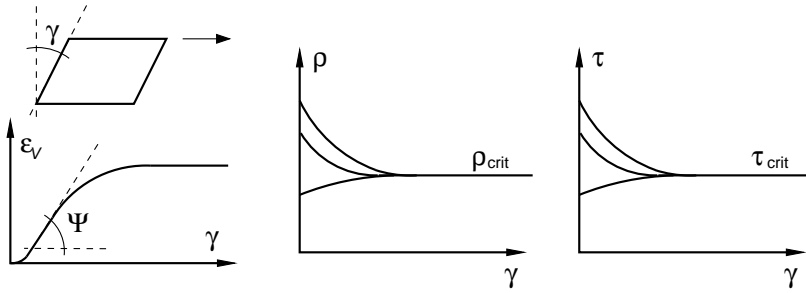
nyírási deformáció (shear strain) egy pozitív

$$\Delta h/h_0 = \varepsilon_V \quad (45)$$

térfogati deformációhoz (volumetric strain) vezet. Ez a szemcsés anyagokra jellemző Reynolds-tágulás.

Ezt a jelenséget látjuk akkor, ha rálépünk a nedves vízparti homokra. A súlyunk alatt deformálódó homok növeli a térfogatát, ami természetesen csak annyit jelent, hogy a szemcsék közötti szabad térfogat nő meg (térfogati hányad csökken). A megnövelt szabad térfogat elnyeli a felszín közeléből a vizet és a lábunk körül a homok láthatóan hirtelen szárazabbá válik a környezeténél.

Ha a sűrű szemcsés anyagot állandó térfogaton próbáljuk nyírni, akkor a vízszintes nyírás hatására függőleges többletnyomás keletkezik. Megjegyezzük, hogy ez a viselkedés idegen a rugalmas szilárd testektől. Könnyen végiggondolható, hogy a lineáris



6. ábra.

rugalmaságtan keretein belül egy izotróp test nyírásával nem befolyásoljuk a nyírásra merőleges nyomást. Ha a test anizotróp, akkor elképzelhető, hogy tiszta nyírás (γ) hatására növekszik ez a nyomás, de ebben az esetben az ellentétes irányú ($-\gamma$) nyírási deformáció nyomáscsökkenést eredményez.

A Reynolds-tágulás a részecskék térfogati kizárásával magyarázható. Mivel a szemcséknél fellépő deformáció méretskálája sokkal kisebb a szemcsék méreténél, ezért a lényegében merev részecskék gátolják egymás mozgását egy tömör pakolásban. Ilyenkor az anyagnak tágulnia kell, hogy beindulhasson a relatív mozgás. A Reynolds-tágulás mértékét a tágulás szögével szokás jellemezni (6. ábra):

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{d\varepsilon_V}{d\gamma} \right). \quad (46)$$

Megjegyezzük, hogy a nyírési deformációnak kis γ értékre nyírési szög jelentése van, mert a nyírési szög $= \tan^{-1} \gamma \approx \gamma$ (6. ábra), ezért a γ -t szögdeformációnak is nevezik.

Ha a nyírési deformációt növeljük akkor az anyag sűrűsége beáll egy egyensúlyi értékre. Ugyanez mondható a deformációhoz szükséges F_t erőről is. A közvetlen nyírás kísérletek azt mutatják, hogy a szemcsés anyag a nyírás hatására egy olyan – az adott anyagra jellemző – kritikus állapotba jut, ami nem függ a kezdeti feltételektől, az F_n nyomerőtől és (ha nem túl nagy a $\dot{\gamma}$ nyírási ráta) a deformáció sebességétől sem.

Ebből az is látszik, hogy az anyag nemcsak tágulhat a deformáció kezdetén, hanem tömörödhet is, ha a kezdeti sűrűség kisebb a kritikus sűrűségnél (6. ábra).

A **kritikus állapotba** került szemcsés anyag egy μ_{eff} **effektív súrlódási együtthatóval** írható le. Ez azt jelenti, hogy a nyírési síkokra (a 5. ábrán ezek vízszintes síkok, melyek mentén az elmozdulás történik kritikus állapotban) nézve a nyíró és normálfeszültség aránya állandó, hasonlóan a szilárd testek érintkezési felületeinek a csúszásához:

$$\frac{\tau_{\vec{n}}}{\sigma_{\vec{n}}} = \mu_{\text{eff}} \quad (47)$$

Ideális Coulomb-anyag

Ebben a részben azt a kérdés vizsgáljuk, hogy milyen feszültség kell a szilárdan viselkedő szemcsés anyag megfolyásához.

Ha rugalmas testek deformációját vizsgáljuk, akkor az elméleti leírás általában megmarad a legegyszerűbb ideális esetenél, amikor a deformáció és a feszültség között lineáris

kapcsolat van. Pl. $\tau = G\gamma$ a nyírási deformáció arányos a nyírófeszültséggel. Ha viszkózus folyadékokat tekintünk, akkor az ideális eset a newtoni folyadék, ahol $\tau = \eta\dot{\gamma}$. (A G nyírási modulus és η viszkozitás anyagállandók.)

A szemcsés anyagok esetén ugyanilyen egyszerű ideális modellt képvisel a Coulomb-anyag. Ebben a modellben:

- A feszültség (pl. τ) nem függ a deformáció mértékétől vagy sebességétől (tehát a fenti modellekben fontos γ és $\dot{\gamma}$ értéke itt nem számít).
- Az anyag tökéletesen merev, vagy ha eléri a folyáshatárt, akkor plasztikusan deformálódik. A rugalmas deformációkat itt elhanyagoljuk.
- Úgy gondolunk az anyagra, mint egy homogén izotróp kontinuumra, ahol minden pontban és azon belül minden irányban van egy potenciális csúszófelület (egy mikroszkopikus csúszósík), ami a szilárd testeknél megszokott súrlódás szabályai szerint működik: Egy adott irányú felületen tapadás van, ha a rá vonatkozó

$$\tau_{\vec{n}} < \mu\sigma_{\vec{n}}. \quad (48)$$

Ha az anyag minden pontján minden irányban tapadás van, akkor az anyag merev. A tapadási határt elérő csúszósíkok összehangolt elmozdulásából jön létre az anyag plasztikus deformációja. Lokálisan a csúszáshoz tartozó irányra teljesül, hogy

$$\tau_{\vec{n}} = \mu\sigma_{\vec{n}}. \quad (49)$$

A nyírófeszültség $\tau_{\vec{n}}$ sehol nem lépheti túl a $\mu\sigma_{\vec{n}}$ határt, akármilyen nagyra is nő az anyagot ért külső terhelés. (Ha a már képlékenyen deformálódó anyagon tovább növeljük a külső terhelést, akkor gyorsuló deformációt fogunk kapni.)

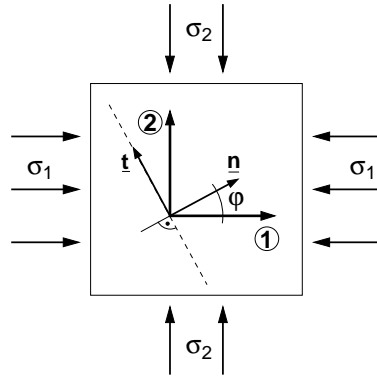
- Az ideális Coulomb-anyag szilárdságtani tulajdonságait egy darab anyagállandó jellemzi, ez a μ belső súrlódási együttható vagy az ezzel ekvivalens Φ belső súrlódási szög

$$\mu = \tan(\Phi). \quad (50)$$

Tipikusan a Φ értéke 20° és 50° közé esik valódi szemcsés anyagokra. Megjegyezzük, hogy a kohézív anyagok Coulomb-modelljében megjelenik egy másik paraméter is, egy belső feszültségskála c , mely a kohézió erősségét jellemzi. Ekkor a csúszáshatár $\tau_{\vec{n}} = \mu\sigma_{\vec{n}} + c$ alakot veszi fel. Mi a $c = 0$ esettel foglalkozunk.

- Az ideális Coulomb-anyag ellenáll bármekkora gömbszerű nyomásnak. A képlékeny deformáció állandó térfogaton történik. Kohézió hiányában ($c = 0$) húzófeszültség nem lehetséges, húzóerőktől az anyag szétesik.

Láthatóan itt fontos szerephez jut a nyíró és normálfeszültség irány szerinti eloszlása. Az eligazodáshoz nagy segítséget nyújt a feszültségállapotoknak egy geometriai tárgyalásmódja, melyet a következő fejezetben mutatunk be.



7. ábra.

Mohr-körök

A szemcsés anyag stabilitása - megfolyása szempontjából fontos kérdés, hogy a különböző orientációjú teszt síkokon mekkora a nyíró ($\tau_{\vec{n}}$) és a normál feszültség ($\sigma_{\vec{n}}$).

Vegyünk egy kétdimenziós esetet, és határozzuk meg $\tau_{\vec{n}}$ és $\sigma_{\vec{n}}$ értékét egy általános feszültségállapotban, ahol σ_1 és σ_2 a feszültségtenzor két főértéke (legyen $\sigma_1 \geq \sigma_2$) és az \vec{n} normálvektor φ szöget zár be az (1) fő tengellyel (7. ábra).

Főtengelybázisban a feszültségmátrix és a normál- ill. tangenciális vektor a következő alakot veszi fel:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (51)$$

A keresett – (7.) ábrán szaggatott vonallal jelölt síkon ébredő – feszültség:

$$\underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

A normális és tangenciális irányú vetület (tangenciális irányban nem érdekes az előjel, csak a nagyságot nézzük) a következő:

$$\sigma_{\vec{n}} = \vec{n} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 = (n_1^2 - n_2^2) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + (n_1^2 + n_2^2) \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad (53)$$

$$\tau_{\vec{n}} = |\vec{t} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n}| = |-n_2 n_1 \sigma_1 + n_1 n_2 \sigma_2| = \left| 2n_1 n_2 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \quad (54)$$

ahol

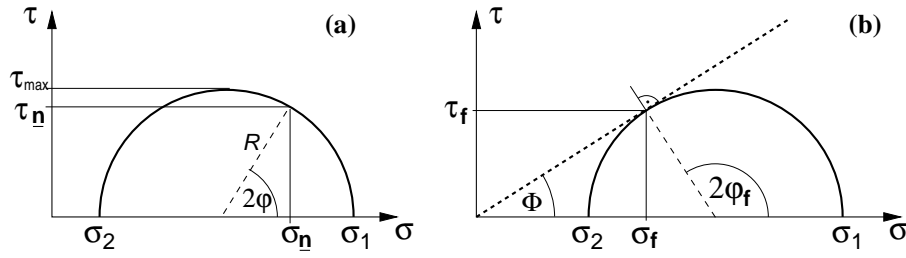
$$n_1^2 - n_2^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi, \quad (55)$$

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \quad \text{és} \quad (56)$$

$$2n_1 n_2 = 2\cos\varphi \sin\varphi = \sin 2\varphi. \quad (57)$$

Ha ábrázoljuk a kapott eredményt, akkor a különböző orientációjú síkokon ébredő feszültségeknek egy-egy pont felel meg a $\sigma_{\vec{n}} - \tau_{\vec{n}}$ koordinátarendszerben. Látható, hogy ezek a pontok egy körvonalon helyezkednek el (8.a ábra). Ez a **Mohr-kör**, melynek sugara $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, középpontja pedig a normál feszültségek átlaga, egy lokális átlagnyomás.

$$\sigma_{\vec{n}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + R \cos 2\varphi, \quad (58)$$



8. ábra.

$$\tau_{\vec{n}} = R |\sin 2\varphi| . \quad (59)$$

Az egész Mohr-kör tehát a lokális feszültségállapotot reprezentálja, oda-vissza megfeleltethető a feszültségtenzornak. A kör egyes pontjai mutatják a különböző orientációjú síkok feszültségét olyan módon, hogy a térbeli φ (a \vec{n} normálvektor és az (1) főtengely közötti) szöghöz a Mohr-síkon 2φ szög tartozik (8.a ábra).

Ha például a teszt sík normálvektora az (1) főirányba mutat, akkor a $\varphi = 2\varphi = 0$ szögnek megfelelő $(\sigma, \tau) = (\sigma_1, 0)$ pontját kapjuk a Mohr-körnek, ahogy ezt vártuk is. Ha a Mohr-síkon 180° -ot fordulunk, jutunk a $(\sigma, \tau) = (\sigma_2, 0)$ ponthoz, ami nyírófeszültség mentes, a (2) főirányhoz tartozik és valóban 90° -os térbeli elfordulásnak felel meg az (1) főirányhoz képest.

A Mohr-körből az is rögtön látszik, hogy a maximális nyírófeszültség a főértékek különbségének a fele és az ehhez tartozó teszt sík 45° -ban áll a főirányokhoz képest:

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (60)$$

$$\varphi_{\tau_{\max}} = 45^\circ . \quad (61)$$

A maximális és minimális normál feszültség a két főirányban mérhető.

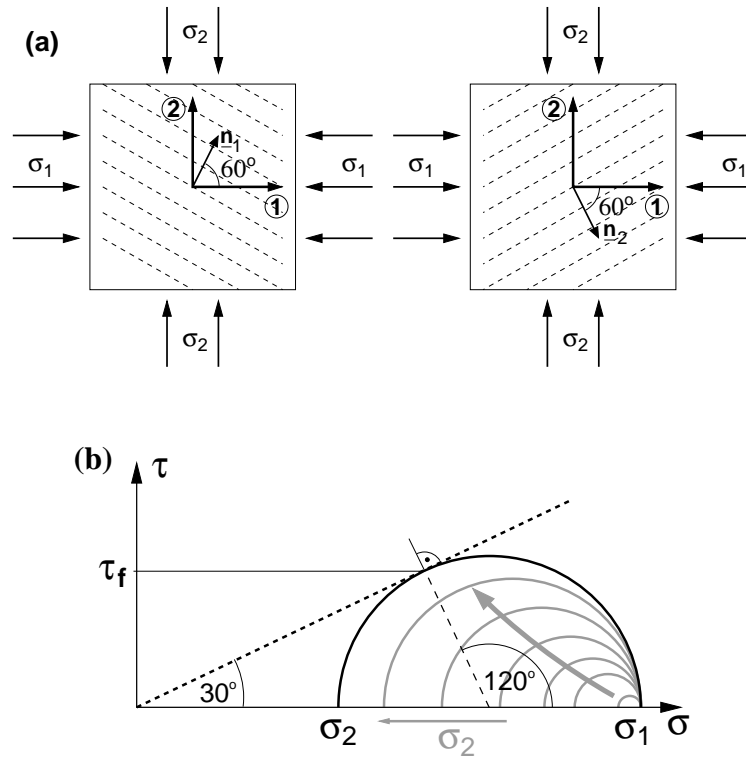
Az ideális Coulomb-anyagot tekintve a Mohr-síkon egy origóból induló $\tan \Phi$ meredekségű egyenes jelzi a folyáshatárt. Amíg a Mohr-kör az egyenes alatt helyezkedik el, deformáció nem lehetséges.

Ha a külső terhelést úgy változtatjuk, hogy rögzített σ_2 mellett folyamatosan növeljük a σ_1 értékét, akkor a növekvő Mohr-kör egy ponton érinteni fogja a folyáshatárt (8.b ábra). Deformáció közben a Mohr-kör eltolódhat és változhat a nagysága, de mindig ilyen érintő helyzetűnek kell maradnia. Ez a **Mohr-Coulomb-féle megfolyási kritérium**. A tapadását elvesztő sík orientációját (φ_f) az érintkezési pont jelöli ki. Erre a pontra nézve a legnagyobb a $\tau_{\vec{n}}/\sigma_{\vec{n}}$ arány, mely egyenlő a μ belső súrlódással.

Érdeemes kihangsúlyozni, hogy a maximális nyírófeszültség irányát továbbra is tapadás jellemzi, mivel ezeken a síkokon (az adott térbeli pontban az (1) főirányhoz képest $\varphi = 45^\circ$ -ban álló síkokon) a $\tau_{\vec{n}}/\sigma_{\vec{n}}$ arány mindig kisebb mint a belső súrlódás (8.b ábra).

A megfolyásért felelős síkok φ_f szögét (megfolyási szög) a belső súrlódás értéke egyértelműen meghatározza. A kapcsolat jól látszik a (8.b) ábrán megjelenő derékszögű háromszögből: $\Phi + (180^\circ - 2\varphi_f) = 90^\circ$. Azaz

$$\varphi_f = 45^\circ + \frac{\Phi}{2} . \quad (62)$$



9. ábra. (a) Csúszósíkok sokasága. (b) Mohr-Coulomb-féle megfolyási kritérium. (c) Deformáció.

Példa: legyen a belső súrlódás Φ szöge 30° . Legyen az anyag homogén feszültségállapotban (minden pontban ugyanaz a feszültségtenzor). A σ_1 főértéket tartjuk állandónak miközben a másik főirányban fokozatosan csökkentjük az anyagot terhelő σ_2 normál feszültséget (9. ábra). A Coulomb-anyag akkor veszíti el a szilárdságát, amikor a növekvő Mohr-kör hozzáér a $\tan \Phi$ meredekségű egyeneshez (9.b ábra). A Mohr-síkon az érintkezési pont 120° -ban helyezkedik el az (1) főirányhoz képest. Ezért a csúszósíkok normálvektora $\varphi_f = 60^\circ$ -os szöget zár be az (1) főiránnyal (azaz a csúszás iránya 30° -ban tér el a maximális feszültség irányától). A mi kétdimenziós rendszerünkben homogén a feszültségeloszlás, ezért az összes ponton átmenő φ_f szögű sík a csúszáshatárra kerül, így párhuzamos síkok sokaságát kapjuk. Természetesen – szimmetria okokból – két ilyen sokaság van a $+60^\circ$ és a -60° szögekhez (9.a ábra).

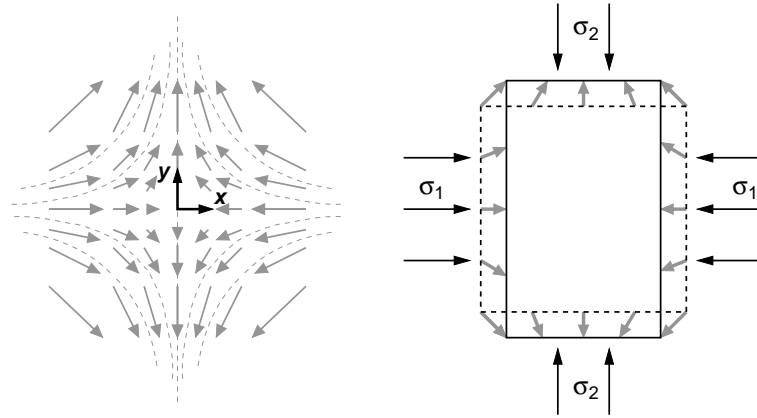
Tételezzük fel, hogy a csúszás az összes síkon ugyanolyan mértékű, és a síkokon ébredő nyírófeszültség irányába történik. Ekkor a két irányhoz tartozó $\vec{u}_1(\vec{r})$ és $\vec{u}_2(\vec{r})$ elmozdulásmező a következő alakot veszi fel:

$$\vec{u}_1(\vec{r}) = a\vec{t}_1(\vec{n}_1\vec{r}) \quad \text{és} \quad \vec{u}_2(\vec{r}) = -a\vec{t}_2(\vec{n}_2\vec{r}), \quad (63)$$

ahol (a) a deformáció nagyságával arányos konstans, (\vec{t}_1) és $(-\vec{t}_2)$ a nyírófeszültség irányát mutató (az adott csúszósíkkal párhuzamos) vektorok:

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_f \\ \sin \varphi_f \end{bmatrix} \quad \vec{t}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_f \\ \cos \varphi_f \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_f \\ -\sin \varphi_f \end{bmatrix} \quad -\vec{t}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_f \\ -\cos \varphi_f \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Eredményül egy egyszerű elmozdulásmezőt kapunk (10. ábra), mely mutatja a



10. ábra.

feszültségállapot szimmetriáját:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_1(\vec{r}) + \vec{u}_2(\vec{r}) = \begin{bmatrix} -a \sin(2\varphi_f) x \\ +a \sin(2\varphi_f) y \end{bmatrix}. \quad (65)$$

A (9.) definíció alapján meghatározhatjuk a deformációs tenzort ($\underline{\underline{\varepsilon}}$ az \vec{u} deriváltjának szimmetrikus része). A deformáció homogén (az anyag minden pontjában ugyanaz):

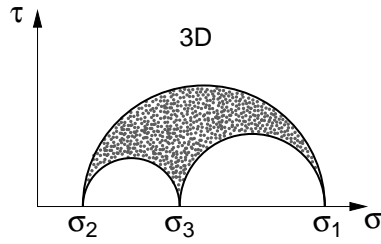
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (66)$$

ahol $\varepsilon = a \sin(2\varphi)$. Látható, hogy

- (i) a deformációs főtengelek egybeesnek a feszülstégtenzor főtengeleivel,
- (ii) a deformáció közben térfogatváltozás nem történik ($\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{div } \vec{u} = 0$),
- (iii) a deformáció nem függ az anyag μ belső súrlódási együtthatójától (és a φ_f szögtől sem). A belső súrlódás csak abban nyilvánul meg, hogy milyen terhelésnél – milyen σ_1/σ_2 aránynál – indul meg a deformáció. A σ_1 nagyobbik főérték irányában létrejövő $-\varepsilon$ összenyomásra minden esetben $+\varepsilon$ tágulás a válasz a másik főirányában, függetlenül μ értékétől.

Érdeemes megemlíteni, hogy a Mohr-körrel tanultak nem csak a feszültségállapot szemléltetéséhez hasznosak, hanem bármilyen szimmetrikus 2x2-es mátrix esetén láthatóvá (és átláthatóvá) teszik a bázistranszformációt. Ha egy a_{ij} szimmetrikus mátrix elemeiből képzett (a_{xx}, a_{xy}) és (a_{yy}, a_{xy}) koordinátájú pontokat ábrázoljuk az x - y -(Mohr)síkon, akkor ezzel már kijelöltük a megfelelő Mohr-kört, mely átmegy a két ponton és a középpontja az x -tengelyen van. A Mohr-körből rögtön látszik a két főérték és a főtengelek iránya. Azt is tudjuk, hogy a mátrixelemeket reprezentáló két pont egy bázistranszformáció hatására a körön mozog, mégpedig úgy, hogy a koordinátarendszer φ szögű elfordulása 2φ elfordulást okoz a Mohr-ábrán.

A fentiekben csak kétdimenziós feszültségállapotokat vizsgáltunk. Belátható, hogy három dimenzió esetén a lehetséges (σ, τ) párok három Mohr-kör által körbehatárolt területen jelentkeznek a Mohr-síkon (11. ábra), ahol a σ_1, σ_2 és σ_3 főfeszültségek páronként határoznak meg egy-egy Mohr-kört. Tehát, ha ábrázoljuk az összes lehetséges orientációhoz tartozó normál $\sigma_{\vec{n}}$ és nyíró $\tau_{\vec{n}}$ feszültséget, akkor az ábrán látható területet



11. ábra.

kapjuk. Ebből látszik, hogy a Coulomb-anyag megfolyása szempontjából a nagyság szerint középső főértéknek (σ_3) nincs jelentősége. A folyáshatárt csak a legkülső Mohr-kör érheti el és ezért a mikroszkopikus csúszósíkok normálvektora is az extrémális főfeszültség (σ_1 , σ_3) irányok által kifeszített síkban helyezkedik el. Erre a síkra alkalmazható a kétdimenziós esetre fent leírt tárgyalásmód.

A Coulomb-anyag effektív súrlódása

Itt azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatban áll egymással az előző fejezetekben bevezetett μ_{eff} effektív és μ belső súrlódási együttható.

Nézzük meg, hogy hogyan viselkedik a Coulomb-féle modell-anyag egy közvetlen nyíraskísérletben (5., 6. ábra). A Coulomb-modellben természetesen nem jelentkezik a valódi kísérletekre jellemző kezdeti tranzienst: nincs Reynolds-tágulás, a sűrűség és a deformációhoz szükséges nyírófeszültség nem változik a γ szögdeformáció függvényében. Azt mondhatjuk, hogy a Coulomb-anyag mindig kritikus állapotban van.

A közvetlen nyíraskísérletben jelöljük x koordinátával a nyírás irányát. Ekkor a γ szögdeformációhoz tartozó $\vec{u}(\vec{r})$ elmozdulásmező a következő alakba írható:

$$u_x = \gamma y \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad u_z = 0. \quad (67)$$

Mivel az elmozdulásmező független a z koordinátától és z irányú komponense nulla, ezért a probléma kétdimenzióssá redukálódik és a továbbiakban a z koordináta elhagyható.

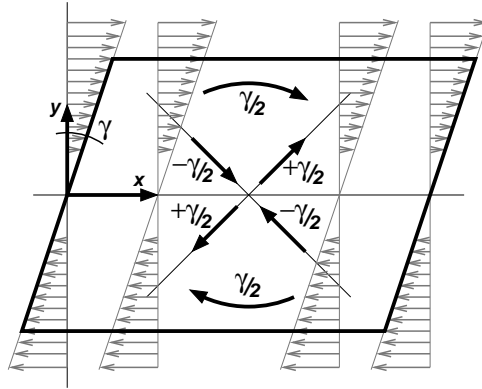
A (9) definíció alapján egy homogén deformációt kapunk. A deformációs mátrix alakja minden pontban:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (68)$$

Határozzuk meg a deformációs főértékeket és főirányokat! Ha a Mohr-technikát használjuk, látható, hogy az $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy})$ és $(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$ pontoknak egy $\gamma/2$ sugarú, origó középpontú kör felel meg. A deformációs főértékek (a tenzor sajátértékei) tehát:

$$\varepsilon_1 = +\frac{\gamma}{2} \quad , \quad \varepsilon_2 = -\frac{\gamma}{2}. \quad (69)$$

A főirányok pedig 45° -kal vannak elforgatva az x és y tengelyekhez képest (12. ábra). A deformációs tenzor tehát ugyanaz, mint a (10). ábrán látható esetnél (66. egyenlet) és feltételezhetjük, hogy a hozzá tartozó feszültségállapot is ugyanaz. Vagyis a deformációs tenzor és a feszültségtenzor főtengelei egybeesnek és deformáció közben teljesül a Mohr-Coulomb-féle megfolyási kritérium.



12. ábra. A kis γ szöggel jellemzett elmozdulásmező felbontható egy $\gamma/2$ szögű elforgatás és egy deformációs rész összegére, ahol a deformációs főtengek irányában $\pm\gamma/2$ a relatív megnyúlás, ill. összenyomás értéke.

Ezek alapján a nagyobbik (σ_1) főfeszültség a $-\gamma/2$ deformációs sajátértékhez (összenyomáshoz) tartozik, míg σ_2 a megnyúlás irányához. Az ehhez képest 45° -kal elforgatott x - y -koordinátarendszerben a feszültségmátrix alakja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \end{bmatrix}. \quad (70)$$

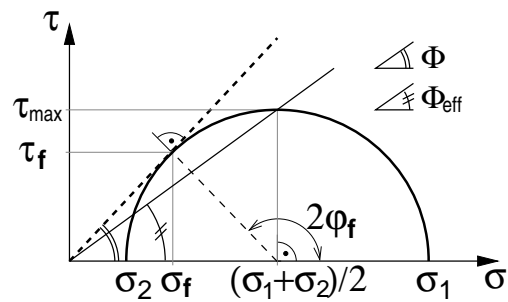
A (13.) Mohr-ábrán követhető, hogy mi történik, és láthatóvá válik a belső és az effektív súrlódás viszonya. Az effektív súrlódási együtthatót az $\vec{n} = \vec{e}_y$ normálisú síkon ébredő nyíró és normálfeszültségek aránya adja, ami esetünkben:

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\tau_{\vec{n}}}{\sigma_{\vec{n}}} = \frac{|\sigma_{xy}|}{\sigma_{yy}}. \quad (71)$$

A $|\sigma_{xy}|$ érték éppen a maximális nyírófeszültség és egyben a Mohr-kör R sugara, míg a σ_{yy} a Mohr-kör középpontjának a távolsága az origótól. Az ábrán jelölt két derékszögű háromszögből leolvasható, hogy az R/σ_{yy} arány egyrészt megadja a belső súrlódás Φ szögének szinuszát, másrészt az effektív súrlódás szögének a tangensét:

$$\tan(\Phi_{\text{eff}}) = \sin(\Phi) \quad , \quad \mu = \tan(\Phi) \quad , \quad \mu_{\text{eff}} = \tan(\Phi_{\text{eff}}). \quad (72)$$

A fentiekből látható, hogy a makroszkopikus elmozdulás a maximális nyírófeszültség irányába történik. A deformációhoz szükséges nyíróerő adott nyomóerő mellett kisebb, mint azt naivan várhatnánk a belső súrlódás értékéből: $\mu_{\text{eff}} < \mu$.



13. ábra.

Szabad nyírási zónák

variációs modell

zónatörés

Tehetlenségi paraméter

Mit jelent a kvázisztatikus deformáció? Mi történik, ha gyorsítunk?

Erő és időskálák

μ_{eff} mint a tehetlenségi paraméter függvénye.

Bagnold, lejtőn stac. áramlás

Koordinációs számok

Diszkrét elem szimulációk

Molekuladinamika

Eseményvezérelt

Kontakt dinamika