1. Első rendű, állandó együtthatós, homogén diff. egyenlet rendszerek

Ha a differenciálegyenletnek töb komponense van, akkor differenciál egyenelt rendszerről beszélünk. Tekintsük ennek egy speciális esetét:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \ ,$$

ahol $\mathbf{y}$ egy n-komponensű vektor, $\mathbf{A}$ pedig egy $n \times n$-es állandó mátrix. Az előzőekben láttuk, hogy az $\dot{y} = ay$ egyenlet megoldása $y(t) = y(0)e^{at}$ alakú. Keressük a differenciál egyenlet rendszer megoldását a

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0)$$

alakban. Mielőtt behelyettesítéssel meggyőződünk a feltételezés helyességéről, határozzuk meg a $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix függvény idő szerinti deriváltját.

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \frac{d}{dt}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}\mathbf{A}^n t^{n-1} = \mathbf{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} \ .$$

Az utolsó tag összegzésében írjuk át az indexeket:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

Helyettesítsük be a kapott eredményt a differenciáál egyenletünkbe:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) \ ,$$

és meggyőződhetünk arról, hogy kielégíti azt. A $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix függvényt meghatározhatjuk a spektrál felbontás segítségével. Legyenek $\{\mathbf{u}_i\}$, $\{\mathbf{v}_i\}$ az $\mathbf{A}$ mátrix jobb és baloldali sajátvektorai:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u}_i &= \lambda_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i^t \mathbf{A} &= \lambda_i \mathbf{v}_i^t \end{aligned}$$

ekkor

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_i, \qquad e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_i$$

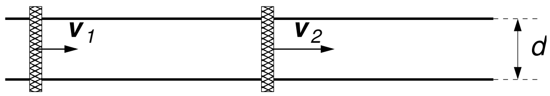
A differenciálegyenlet megoldása tehát:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_i \mathbf{y}(0) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i\mathbf{y}(0)) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i \alpha_i \ ,$$

vagyis a megoldást a $e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i$ lineáris kombinációiként állíthatjuk elő, ahol a lineáris kombináció $\alpha_i = \mathbf{v}_i\mathbf{y}(0)$ együtthatói a kezdő vektor és a baloldali sajátvektor skalár szorzata.

1.1. Példa

Egy hosszú sínpáron két m tömegű fémrúd csúszhat surlúdás nélkül a sín síkjára merőleges, $\mathbf{B}$ homogén, mágneses térben. A két rúd együttes ellenállása legyen R és a sinek közötti távolság d. Hogyan mozognak a a rudak?



A hurokban indukált feszültség

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -(v_2 - v_1)Bd \ ,$$

melynek hatására $I = U/R$ áram folyik a fémrudak és a sín alkotta hurokban.

A rudakra a sebességükkel ellentétes irányú $F = IdB$ Lorentz erő hat. A mozgásegyenleteket a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1) \ , \end{aligned}$$

ahol $\alpha = \frac{d^2B^2}{R}$. A gyorsulásokat fejezzük ki a sebesség deriváltjaként:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\dot{v}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1) \ . \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

vektort, ekkor a fenti egyenletet a következőképp írhatjuk fel:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} \tag{1}$$

Megoldás spektrál felbontás segítségével

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \ ,$$

a két sajátérték tehát $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -2\alpha/m$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A mátrix szimmetrikus, így a jobb és baloldali sajátvektorok megegyeznek. A megoldás a következő lesz:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}(0)) + e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\mathbf{u}_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}(0)) \ .$$

A megoldásban szereplő két tagot módusoknak nevezzük. Vizsgáljuk meg a módusok jelentését! Az első módus

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}(0)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_{10} + v_{20} \\ v_{10} + v_{20} \end{pmatrix}$$

a tömegközéppont mozgását írja le. Külsö erők hiányában a tömegközéppont egyenletes mozgást végez. A második módus a relatív koordináták sebességét adja meg, amely az idővel exponenciálisan csökken:

$$e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\mathbf{u}_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}(0)) = \frac{e^{-\frac{2\alpha}{m}t}}{2}\begin{pmatrix} v_{10} - v_{20} \\ v_{20} - v_{10} \end{pmatrix}$$

Ugyanezt a megoldást kapjuk akkor is, ha áttranszformáljuk a rendszerünket egy olyan koordináta rendszerbe, amelyben az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális. Legyen $\mathbf{U}$ az a mátrix, amely a fenti mátrixot diagonális alakra transzformálja:

$$\mathbf{U}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Az $\mathbf{U}$ mátrix a 1. számú egyenletben szereplő mátrix sajátvektoraiból épül fel. A 1. egyenletbe szúrjunk be egy-egy $\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$ egységmátrixot:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{v} \tag{3}$$

és vezessük be az $\mathbf{u} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{v}$ vektort. Balról szorozzuk be a 3. számú egyenletet $\mathbf{U}^{-1}$-gyel:

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{\alpha}{m}\mathbf{U}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{U}\mathbf{u} \tag{4}$$

és használjuk fel a 2. számú egyenletet:

$$\dot{u}_1 = -\frac{\alpha}{m}\lambda_1 u_1 \tag{5}$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{\alpha}{m}\lambda_1 u_2 \tag{6}$$

A fenti két, immáron független differenciál egyenlet megoldása:

$$u_1 = Ae^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_1 t} \tag{7}$$

$$u_2 = Be^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_2 t} \tag{8}$$

Vissza kell térnünk az eredeti $\mathbf{v}$ sebességekre a $\mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{u}$ transzformációval, amit írjunk fel részletesen:

$$\begin{aligned} v_1 &= U_{11}u_1 + U_{12}u_2 = AU_{11}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_1 t} + BU_{12}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_2 t} \\ v_2 &= U_{21}u_1 + U_{22}u_2 = AU_{21}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_1 t} + BU_{22}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Ahol a $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$ és $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix}$ vektorok a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix λ_1, λ_2 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai. Tehát a megoldást a sajátvektorok segítségével a következőképpen adhatjuk meg:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{c_1}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_1 t} + B\mathbf{c_2}e^{-\frac{\alpha}{m}\lambda_2 t} .$$

Az A és B együtthatókat a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg.