Green függvény

2021. február 21.

George Green

George Green eredetileg műkedvelő matematikus volt, – eredeti foglalkozását tekintve molnár, malom tulajdonos, – de munkássága mindenképp a legnagyobb matematikusok közé emeli. Eredetileg a Maxwell egyenletekben fellépő parciális differenciál egyenletek megoldását tanulmányozta, de az általa kidolgozott módszer általánosan elterjedt a differenciálegyenletek megoldása során és a fizika számos területén felbukkan.

George Green (1793-1841)

A Green család szélmalma Sneintonban, ma Nottingham része

Lineáris differenciál operátorok

Legyen $\mathcal{V}$ a legalább n-szer deriválható $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ képező fügvények alkotta lineáris vektortér. Jelöljön A egy $\mathcal{V}$-ből $\mathcal{V}$-be képző műveletet: $A \; : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Ha A teljesítiti a linearitási feltételeket: $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v$, $u, v \in \mathcal{V}$, akkor A-t lineáris operátornak nevezzük. Ilyen művelet lehet a deriválás is. Egy n-ed rendű, lineáris differenciáloperátort a következőképpen írhatunk fel:

$$\mathcal{L} = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \ldots a_n \frac{d^n}{dx^n}$$

Nyilván

$$\mathcal{L}y(x) = a_0(x)y(x) + a_1(x)\frac{df}{dx} + a_2(x)\frac{d^2 f}{dx^2} + \ldots a_n \frac{d^n f}{dx^n}$$

A differenciáloperátor segítségével a következőképpen írhatunk fel egy lineáris homogén és inhomogén differenciálegyenletet:

$$\mathcal{L}y(x) = 0 \; , \qquad \mathcal{L}y(x) = f(x)$$

Green függvény

Egy $\mathcal{L}$ lineáris differenciáloperátor Green függvényét a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{L}(x)G(x,x') = \delta(x-x') \ ,$$

ahol a $\mathcal{L}(x)$ jelőlés azt jelenti, hogy a differenciál operátor az x változóra hat. Általában kirovunk valamilyen határfeltételt is a Green függvényre, legtöbbször megköveteljük, hogy $G(x,x') = 0$, ha $x < a$.
Inhomogén differenciálegyenlet egy partikulásis megoldása:

$$\mathcal{L}y_p(x) = f(x) \ , \qquad y_p(x) = \int G(x,x')f(x')dx'$$

Behelyettesítés:

$$\mathcal{L}\int G(x,x')f(x')dx' = \int \underbrace{\mathcal{L}G(x,x')}_{\delta(x-x')} f(x')dx' = \int \delta(x-x')f(x')dx' = f(x)$$

ahol feltételeztük, hogy az integrálás és a differenciálás felcserélhető műveletek.
$G(x,x') = 0$ és $y_p(x) = 0$ ha $x < a$. Ez azt jelenti, hogy az inhomogén tagot az a-ban kapcsoljuk be.

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet Green függvénye

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + p(t)y = f(t) \ , \qquad \frac{d}{dt}G(t,t') + p(t)G(t,t') = \delta(t-t')$$

A Dirac delta csak akkor különbözik nullától, ha $t = t'$, így ha $t < t'$ és $t > t'$ akkor $G(t,t')$ arányos a homogén megoldással:

$$G(t,t') = \begin{cases} c_1 y_h(t) & \text{ha} \quad t < t' \\ c_2 y_h(t) & \text{h} \quad t > t' \end{cases}$$

A határfeltétel szerint $G(t,t') = 0$, ha $t < a$, ezért $c_1 = 0$! Integráljuk a differenciálegyenletet t' körül egy kicsiny ε tartományon:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} G(t,t')dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} p(t)G(t,t')dt = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t')dt = 1$$

Az egyenlet jobb oldala egységnyi, hiszen a Dirac delta integrálja bármilyen kicsiny intervallumon, amely az argumentuma zérushelyét tartalmazza egy. Tételezzük fel hogy $p(t)$ és $G(t,t')$ korlátos. Ebben az esetben a baloldal második tagja eltünik, ha ε-nal tartunk nullához.

$$G(t'+,t') - G(t'-,t') = 1 \ ,$$

$$G(t'+,t') - G(t'-,t') = 1\ ,$$

A Green függvénynek ugrása van, ha $t = t'$. A perem feltétel szerint, $G(a,t') = 0$, $c_1 = 0$ A Green függvény ugrása $t = t'$-ben akkor teljesülhet, ha a c_2 állandót úgy választjuk meg, hogy $G(t',t') = 1$:

$$G(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \le t < t' \\ c_2 y_h(t) & \text{ha} \quad t > t' \end{cases}$$

A homogén egyenlet megoldása $y_h(t) = e^{\int p(t)dt}$.

Elsőrendű,lineáris differenciálegyenlet Green függvénye:

$$G(t,t') = e^{-\int_{t'}^{t} p(x)dx}\Theta(t-t')$$

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet Green függvénye

Korábban láttuk:

$$\dot{y} + p(t)y = q(t) \ , \qquad u(t) = e^{\int p(t)dt}$$
$$y(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(t')q(t')dt' + C\frac{1}{u(t)} = y_p(t) + Cy_h(t) \ ,$$

ahol C a szabad paraméter a kezdőfeltétel teljesítéséhez. Legyen $P(t) = \displaystyle\int p(t)dt$, a $p(t)$ függvény primitív függvénye. Ekkor a megoldást a következőképpen írhatjuk fel:

$$y(t) = e^{-P(t)} \int_a^t e^{P(t')}q(t')dt' + Ce^{-P(t)} \ .$$

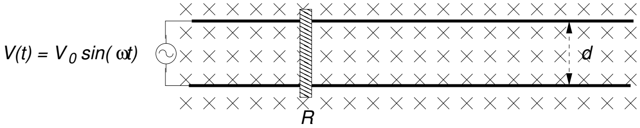
Nyilvánvalóan $y_h(t) = e^{-P(t)}$ a differenciálegyenlet homogén megoldása. Állítsuk elő a Green függvénnyel a partikuláris megoldást:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_a^\infty G(t,t')q(t')dt' = \int_a^\infty e^{-\int_{t'}^t p(x)dx}\Theta(t-t')q(t')dt' = \int_a^t e^{-\int_{t'}^t p(x)dx}q(t')dt' \\ &= \int_a^t e^{-P(t)+P(t')}q(t')dt' = e^{-P(t)} \int_a^t e^{P(t')}q(t')dt' \ , \end{aligned}$$

amely megegyezik a partikuláris megoldással.

Példa feladat:

Homogén mágneses térben egy R ellenállású, m tömgű rúd surlódás nélkül csúszhat egy sínpáron. A sínre periódikusan változó feszültséget kapcsolunk a $t = 0$ pillanatban. Milyen lesz a rúd mozgása?



A mozgás során indukált feszültség:$V_i = BDv$, a rúdra ható erő $F = IdB$, a hurokegyenlet és a mozgásegyenlet:

$$V_0 \sin(\omega t) - IR - Bdv = 0\,, \qquad m\dot{v} = IdB$$

A rúd sebességét leíró differenciálegyenlet:

$$\dot{v} + \frac{B^2 d^2}{mR} v = \frac{V_0 dB}{Rm} \sin(\omega t)$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $\alpha = \dfrac{B^2 d^2}{mR}$, $\beta = \dfrac{V_0 dB}{Rm}$.

A differenciálegyenlet az új változókkal:

$$\dot{v} + \alpha v = \beta \sin(\omega t)$$

A homogén megoldás: $v_h(t) = Ae^{-\alpha t}$. A Green függvény:

$$G(t, t') = e^{-\alpha(t-t')}\Theta(t - t') \ .$$

A partikuláris megoldás:

$$v_p(t) = \int_0^\infty G(t, t')\beta \sin(\omega t')dt' = \int_0^\infty e^{-\alpha(t-t')}\Theta(t - t')\beta \sin(\omega t')dt'$$

Tudjuk, hogy $\Theta(t - t') = q$ ha $t < t'$, ezért módosítsuk az integrál felső határát:

$$v_p(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-t')}\beta \sin(\omega t')dt' = e^{-\alpha t}\beta \int_0^t e^{\alpha t'} \sin(\omega t')dt'$$

Bontsuk fel a $\sin(\omega t')$ függvényt exponenciális függvények összegére:

$$\sin(\omega t') = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}\right)$$

A partikuláris megoldás:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= e^{-\alpha t}\beta \int_0^t e^{\alpha t'} \sin(\omega t') dt' = e^{-\alpha t}\beta \int_0^t \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\omega)t'} - e^{(\alpha-i\omega)t'}\right) dt' \\ &= e^{-\alpha t}\beta \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega} - \frac{1}{\alpha+i\omega}\right) + \beta e^{-\alpha t}\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(\alpha+i\omega)t}}{\alpha+i\omega} - \frac{e^{(\alpha-i\omega)t}}{\alpha-i\omega}\right) \\ &= e^{-\alpha t}\frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{\beta\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

A teljes megoldás:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{\beta\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega t) + Ce^{-\alpha t}$$

A partikuláris megoldás $t = 0$-ban eltünik - a határfeltételnek megfelelően - ezért a homogén megoldás együtthatója $C = 0$ lesz.

$$v(t) = e^{-\alpha t}\frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{\beta\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Az állandó együthatós differenciálegyenletek esetén van egy plusz szabadságunk. Ha az $y(t)$ függvény kielégíti a differenciálegyenletet akkor az $y(t-t')$ függvény kielégíti azt: $y''(t-t') + ay'(t-t') + by(t-t') = f(t-t')$ differenciálegyenletet. Általános lineáris differenciálegyenlet esetén , amikor az a, b együtthatók maguk is függnek t-től, ez nem áll fenn! A Green függvény megszerkesztéséhez keressük a követkeő egyenlet megoldását:

$$G''(t) + aG'(t) + bG(t) = \delta(t) \ ,$$

majd helyettesítsük t helyére $t - t'$-t. A Green függvénynek itt is ugrása van $t = 0$-ban, ezért keressük $G(t) = y_h(t)\Theta(t)$ alakban és helyettesítsük be az egyenletbe. Szükségünk lesz a Green függvény első és második deriváltjára:

$$\frac{d}{dt} y_h(t)\Theta(t) = y_h'(t)\Theta(t) + y_h(0)\delta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_h(t)\Theta(t) = y_h''(t)\Theta(t) + y_h'(0)\delta(t) + y_h(0)\delta'(t)$$

$$\frac{d}{dt}y_h(t)\Theta(t) = y_h'(t)\Theta(t) + y_h(0)\delta(t)\ , \qquad \frac{d^2}{dt^2}y_h(t)\Theta(t) = y_h''(t)\Theta(t) + y_h'(0)\delta(t) + y_h(0)\delta'(t)$$

Helyettesítsük be a $G''(t) + aG'(t) + bG(t) = \delta(t)$ differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{y_h''(t)\Theta(t) + y_h'(0)\delta(t) + y_h(0)\delta'(t)}_{G''(t)} + a\underbrace{\left(y_h'(t)\Theta(t) + y_h(0)\delta(t)\right)}_{G'(t)} + \underbrace{y_h(t)\Theta(t)}_{G(t)} = \delta(t)$$

$$\underbrace{\left(y_h''(t) + ay_h'(t) + y_h(t)\right)}_{0}\Theta(t) + y_h'(0)\delta(t) + y_h(0)\delta'(t) + y_h(0)\delta(t) = \delta(t)$$

Ahhoz, hogy a jobb és baloldal megegyezzen, a következő határfeltételeket kell teljesítenie a homogén megoldásnak:

$$y_h(0) = 0\ , \qquad y_h'(0) = 1$$

Másodrendű, állandóegyütthatós differenciálegyenlet Green függvénye

$$G(t-t') = y_h(t-t')\Theta(t-t')$$
$$y_h(0) = 0\ , \qquad y_h'(0) = 1$$

Csillapított rezgőmozgás Green függvénye

A gerjesztett, csillapított rezgőmozgás mozgásegyenlete:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \ ,$$

ahol $\omega^2 = D/m$ és $\tau = 2m/\alpha$. A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = 1/\tau \pm i\omega$, ahol $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$. A homogén megoldás:

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

$$y_h'(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)$$

A határfeltételek:

$$y_h(0) = A = 0 \ , \qquad y_h'(0) = -\frac{1}{\tau}A + \omega B = 1 \Rightarrow A = 0 \ , \quad B = \frac{1}{\omega}$$

A csillapított rezgőmozgás Green függvénye

$$G(t,t') = \frac{1}{\omega}e^{-\frac{1}{\tau}(t-t')}\sin(\omega(t-t'))\Theta(t-t')$$