Green függvény

2022. március 6.

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + \beta(t)\dot{y} + \gamma(t)y = f(t) \ ,$$

$\beta(t)$ és $\gamma(t)$ folytonosan deriválható az $[a, b]$ intervallumon.
Peremfeltételek: $G(a, t') = 0$ és $G(b, t') = 0$. $y_1(t)$ és $y_2(t)$ a

$$\ddot{y} + \beta(t)\dot{y} + \gamma(t)y = 0$$

homogén egyenlet megoldásai $y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$ feltételek mellett. A Green függvény kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t, t') + \beta(t)\frac{d}{dt}G(t, t') + \gamma(t)G(t, t') = \delta(t - t')$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') + \beta(t)\frac{d}{dt}G(t,t') + \gamma(t)G(t,t') = \delta(t-t')$$

A Dirac delta mindenütt eltünik, kivéve, ha $t = t'$.

- Ha $t < t'$ akkor $G(t,t')$ arányos $y_1(t)$-vel $\quad y_1(a) = 0$
- Ha $t > t'$ akkor $G(t,t')$ arányos $y_2(t)$-vel $\quad y_2(b) = 0$

$$G(t,t') = \begin{cases} y_1(t)A(t') & \text{ha} \quad t < t' \\ y_2(t)B(t') & \text{ha} \quad t > t' \end{cases}.$$

- $t = t'$ Ha $(G(t,t')$-nek ugrása lenne $t = t'$-nél, akkor a második deriváltjában megjelenne a Dirac delta deriváltja, amely sehol máshol nem szerepel, ezért $G(t,t')$ folytonos t-ben! Integráljuk a Greenfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet t' körül:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{d^2G(t,t')}{dt^2}dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\beta(t)\frac{dG(t,t')}{dt}dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\gamma(t)G(t,t')dt$$

$$= \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\delta(t-t')dt = 1$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{d^2G(t,t')}{dt^2}dt}_{III}+\underbrace{\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\beta(t)\frac{dG(t,t')}{dt}dt}_{II}+\underbrace{\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\gamma(t)G(t,t')dt}_{I}$$

$$=\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\delta(t-t')dt=1$$

$G(t,t')$, $\gamma(t)$ és $\beta'(t)$ folytonos:

I $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\gamma(t)G(t,t')dt=0.$

II $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\beta(t)\frac{dG(t,t')}{dt}dt=\beta(t)G(t,t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}-\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\beta'(t)G(t,t')dt=0.$

III $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{d^2G(t,t')}{dt^2}dt=\frac{dG(t'+,t')}{dt}-\frac{G(t'-,t')}{dt}=1$

Tehát $G(t,t')$ deriváltjának ugrása van $t=t'$-nél.

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

Összefoglalva:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(t'+\varepsilon,t') - G(t'-\varepsilon,t') = 0\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} G'(t'+\varepsilon,t') - G'(t'-\varepsilon,t') = 1$$

$$G(t'+\varepsilon,t') = y_2(t'+\varepsilon)B(t')\,, \qquad G(t'-\varepsilon,t') = y_1(t'-\varepsilon)A(t')$$

Behelyettesítve a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk a feltételekből:

$$\begin{aligned} y_1(t')A(t') - y_2(t')B(t') &= 0 \\ -y_1'(t')A(t') + y_2'(t')B(t') &= 1 \end{aligned}$$

A mátrix inverze:

$$\frac{1}{W(t')}\begin{pmatrix} y_2'(t') & y_2(t') \\ y_1'(t') & y_1(t') \end{pmatrix}$$

ahol $W(t') = y_1(t')y_2'(t') - y_2(t')y_1'(t')$ a Wronsky determináns.

$$\begin{pmatrix} y_1(t') & -y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(t') \\ B(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A(t') = \frac{y_2(t')}{W(t')}\,, \qquad B(t') = \frac{y_1(t')}{W(t')}$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

A másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye:

$$G(t,t') = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(t')}{W(t')} & \text{ha} \quad t \le t' \\ \frac{y_2(t)y_1(t')}{W(t')} & \text{ha} \quad t > t' \end{cases} \quad ,$$

vagy a lépésfüggvényt felhasználva

$$G(t,t') = \frac{y_1(t)y_2(t')}{W(t')}\Theta(t'-t) + \frac{y_2(t)y_1(t')}{W(t')}\Theta(t-t') \; .$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

1. Példa:

Tekintsük a következő differenciálegyenletet és határozzuk meg a hozzá tartozó Green függvényt a $G(0,t')=0$, $G(\frac{5}{2}\frac{\pi}{\omega_0},t')=0$:

$$\ddot{y}+\omega_0 y=f(t)\ .$$

A homegén megoldások: $y_1(t)=\sin(\omega_0 t)$, $y_2(t)=\cos(\omega_0 t)$. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy $y_1(0)=0$ és $y_2(\dfrac{5}{2}\dfrac{\pi}{\omega_0})=0$. A Wronski determináns:ű

$$W(t)=-\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)-\frac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)=-\frac{1}{\omega_0}\ ,$$

A Green függvény:

$$G(t,t')=-\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t')\Theta(t'-t)-\frac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t')\Theta(t-t')$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

2. Példa:

Ha ismerjük a $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ másodrendű lineáris k.d.e. egyik y_1 homogén megoldását, akkor keressük a másik megoldást $y_2 = uy_1$ alakban.

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \ , \qquad y_2'' = u''y_1 + 2u'y' + uy_1''$$

Behelyettesítve:

$$a(x)\left(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\right) + b(x)\left(u'y_1 + uy_1'\right) + c(x)uy_1 = 0$$

$$\underbrace{\left(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1\right)}_{0} u + a(x)y_1u'' + (a(x)2y_1' + b(x)y_1)u' = 0$$

$$a(x)y_1u'' + (a(x)2y_1' + b(x)y_1)u' = 0$$

Vezessük be a $v = u'$ jelölést és v-re egy elsőrendű ineáris k.d.e.-t kapunk, amelyet meg tudunk oldani:

$$a(x)y_1v' + (a(x)2y_1' + b(x)y_1)v = 0$$

v-t integrálva megkaphatjuk u-t, illetve a másik homogén megoldást.

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

2. Példa:
Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = 0$$

és keressük meg a Green függvényt a $G(-1, x') = 0$, $G(1, x') = 0$ peremfeltételek mellett! Az $y = x$ függvény kielégíti a differenciálegyenletet. Keressük meg a másik homogén megoldást! A mi esetünkben $a(x) = x^2$, $b(x) = -(x^2 + 2x)$. Az elsőrendű differenciálegyenlet:

$$x^2xv' + (2x^2 - (x^2 + 2x)x)v = x^3v' - x^3v = 0 \ , \quad v' - v = 0$$

amelynek a megoldása: $v = Ae^x$ alakú. Ezt integrálva: $u = Ae^x + B$. A homogén megoldások általános alakja tehát:

$$y_h(x) = Cx + Dxe^x$$

Másodrendű lineáris k.d.e. Green függvénye

2. Példa:

A homogén megoldás:

$$
\begin{aligned}
y_h(x) &= x(C + De^{x}) \\
y_1(x) &= x(1 - e^{x+1})\,, \qquad y_1(-1) = 0\,, \quad y_1'(x) = 1 - e^{x+1} - xe^{x+1} \\
y_2(x) &= x(1 - e^{x-1})\,, \qquad y_2(1) = 0\,, \quad y_2'(x) = 1 - e^{x-1} - xe^{x-1}
\end{aligned}
$$

Wronsky determináns:

$$
\begin{aligned}
W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) &= x(1 - e^{x+1})(1 - e^{x-1} - xe^{x-1}) - (1 - e^{x+1} - xe^{x+1})x(1 - e^{x \\
&= x^2\left(e^{x+1} - e^{x-1}\right)
\end{aligned}
$$

Green függvény:

$$
G(x,x') = \begin{cases} \frac{x(1-e^{x+1})(1-e^{x'-1})}{x'\left(e^{x'+1}-e^{x'-1}\right)} & \text{ha} \quad x < x' \\ \frac{x(1-e^{x-1})(1-e^{x'+1})}{x'\left(e^{x'+1}-e^{x'-1}\right)} & \text{ha} \quad x < x' \end{cases}
$$

3. Példa: Euler differenciál egyenlet

$$x^2y" + axy' + by = 0$$

Vezessünk be új változót: $u = \ln(x)$. Tudjuk, hogy $u' = 1/x$. Fejezzük ki y deriváltjait az új változóval:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{du}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{dy}{du} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du}$$

Helyettesítsük vissza a differenciálegyenletbe:

$$x^2y" + axy' + by = x^2(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du}) + ax\frac{1}{x}\frac{dy}{du} + by = \frac{d^2y}{du} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0$$

Vagyis a

$$\frac{d^2y}{du} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0$$

másodrendű, állandóegyütthatós differenciálegyenletre jutottunk, amelynek már meg tudjuk szerkeszteni a green függvényét.