

## Másod rendű lineáris, közönséges differenciálegyenletek Green függvénye

Tekintsünk egy általános másod rendű, inhomogén lineáris, közönséges differenciálegyenletet:

$$\alpha(t)\ddot{y} + \beta(t)\dot{y} + \gamma(t)y = f(t) .$$

Tételezzük fel, hogy az  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  függvények folytonosan deriválhatóak és korlátosak az  $[a, b]$  intervallumon. Keressük a differenciálegyenlet Green függvényét homogén perem feltétel mellett:  $G(a, t') = 0$  és  $G(b, t') = 0$ . Jelölje  $y_1(t)$  és  $y_2(t)$  azokat a homogén megoldásokat, amelyekre teljesül, hogy  $y_1(a) = 0$  és  $y_2(b) = 0$ . A Green függvény megkonstruálásához hasonlóan járhatunk el, mint az első rendű esetben. Vizsgáljuk meg a Green függvényt  $t < t'$  és  $t > t'$  esetben. Mindkét esetben a homogén differenciálegyenletnek kell teljesülnie, hiszen a Dirac delta nulla, ha az argumentuma különbözik nullától. Ha az első feltétel teljesül,  $t < t'$ , akkor a Green függvény arányos kell, hogy legyen  $y_1(t)$ -vel. Ha  $t > t'$ , akkor a Green függvény arányos  $y_2(t)$ -vel:

$$G(t, t') = \begin{cases} y_1(t)A(t') & \text{ha } t < t' \\ y_2(t)B(t') & \text{ha } t > t' \end{cases} . \quad (1)$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedik a Green függvény, ha  $t = t'$ ! Tételezzük fel, hogy a Green függvénynek ugrása van a  $t = t'$  helyen. A lépés függvény deriváltja Dirac delta, a második deriváltja  $\delta'(t - t')$ , csakhogy a differenciálegyenlet jobb oldalán nem szerepel  $\delta(t - t')$ -nál bonyolultabb matematikai objektum! Ebből arra következtetünk, hogy a Green függvény folytonos a  $t = t'$  helyen.

$$G(t'+, t') = G(t'-, t') \quad (2)$$

A Green függvény deriváltjának a viselkedését térképezzük fel úgy, hogy integráljuk a differenciálegyenletet  $t'$  körül egy infinitezimálisan kicsiny  $\varepsilon$  tartományon:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \alpha(t) \frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \beta(t) \frac{dG(t, t')}{dt} dt + \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \gamma(t) G(t, t') dt = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t - t') dt = 1 \quad (3)$$

Nézzük először az egyenlet bal oldalán szereplő harmadik tagot. Mind a Green függvény, mind  $\gamma(t)$  korlátos, ezért ez a tag eltűnik.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \gamma(t) G(t, t') dt = 0 .$$

A következő tag vizsgálatához végezzünk el egy parciális integrálást:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \beta(t) \frac{dG(t, t')}{dt} dt = \beta(t) G(t, t') \Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{d\beta(t)}{dt} G(t, t') dt = 0 .$$

Miután  $\beta(t)$  deriváltja és  $G(t, t')$  is folytonos, ez az integrál is eltűnik a  $\varepsilon \rightarrow 0$  határátmenetben. Az első tag tanulmányozásához végezzünk el itt is egy parciális integrálást:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \alpha(t) \frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} dt = \alpha(t) \frac{dG(t, t')}{dt} \Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{d\alpha(t)}{dt} \frac{dG(t, t')}{dt} dt$$

Miután  $\alpha(t)$  folytonosan deriválható, az utolsó tag határesetben eltűnik, az előzőleg taglalt indokok alapján, így a teljes 3. integrálból csak az első tag marad:

$$\alpha(t') \left( \frac{dG(t'+, t')}{dt} - \frac{G(t'-, t')}{dt} \right) = 1,$$

vagyis:

$$\frac{dG(t'+, t')}{dt} - \frac{G(t'-, t')}{dt} = \frac{1}{\alpha(t')} . \quad (4)$$

Helyettesítsük be a Green függvény homogén megoldásokkal előállított alakját a 2 és ?? számú feltételekbe:

$$\begin{aligned} y_1(t')A(t') - y_2(t')B(t') &= 0 \\ -\dot{y}_1(t')A(t') + \dot{y}_2(t')B(t') &= \frac{1}{\alpha(t')} , \end{aligned} \quad (5)$$

vagy mátrixosan felírva

$$\begin{pmatrix} y_1(t') & -y_2(t') \\ -\dot{y}_1(t') & \dot{y}_2(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t') \\ B(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha(t')} \end{pmatrix}$$

A fenti egyenlet egy egyszerű lineáris egyenletrendszer rögzített  $t'$  esetén, amelynek a megoldása:

$$A(t') = \frac{y_2(t')}{\alpha(t')W(t')}, \quad B(t') = \frac{y_1(t')}{\alpha(t')W(t')}, \quad (6)$$

ahol  $W(t') = y_1(t')\dot{y}_2(t') - \dot{y}_1(t')y_2(t')$ , a fenti mátrix determinánsa, az u.n. Wronski determináns. A Green függvény tehát a következő alakot ölti:

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(t')}{\alpha(t')W(t')} & \text{ha } t \leq t' \\ \frac{y_2(t)y_1(t')}{\alpha(t')W(t')} & \text{ha } t > t' \end{cases} , \quad (7)$$

vagy a lépésfüggvényt felhasználva

$$G(t, t') = \frac{y_1(t)y_2(t')}{\alpha(t')W(t')} \Theta(t' - t) + \frac{y_2(t)y_1(t')}{\alpha(t')W(t')} \Theta(t - t') . \quad (8)$$

### Példa:

Tekintsük a következő differenciálegyenletet és határozzuk meg a hozzá tartozó Green függvényt a  $G(0, t') = 0$ ,  $G(\frac{5}{2}\frac{\pi}{\omega_0}, t') = 0$ :

$$\ddot{y} + \omega_0 y = f(t) .$$

A homogén megoldások:  $y_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ ,  $y_2(t) = \cos(\omega_0 t)$ . Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy  $y_1(0) = 0$  és  $y_2(\frac{5}{2}\frac{\pi}{\omega_0}) = 0$ . A Wronski determináns:ú

$$W(t) = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) = -\frac{1}{\omega_0} ,$$

A Green függvény:

$$G(t, t') = -\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t') \Theta(t' - t) - \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t') \Theta(t - t')$$