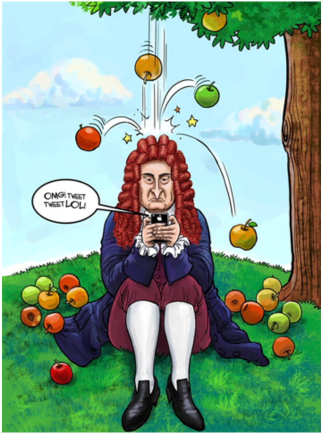
Közönséges differenciálegyenletek

2021. február 7.

Differenciál számítás kezdetei

A differenciál kalkulus két megteremtője:



Isaac Newton (1643 - 1727)

Gitfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)

Ha gyakren elköveted a következő hibát:

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx}$$

ne aggódj, Leibniz is elkövette!

Közönséges differenciálegyenletek

A differenciálegyenlet, amellyel már középiskolában is találkoztunk:

$$F(x) = ma \ ,$$

Newton második törvénye. Az erő a hely függvénye, a gyorsulás a hely második deriváltja:

$$F(x) = m\ddot{x}$$

Általánosan egy n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet:

explicit: $F\left(x, y, y', \cdots y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}$ pl.: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} + mg$

implicit: $F\left(x, y, y', \cdots y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ pl.: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 - E = 0$

$y = y(x)$, $y^{(n)}$ az $y(x)$ függvény n-ik deriváltja. A differenciálegyenlet rendje megegyezik a legmagasabb derivált rendjével[1]. A közönséges differenciálegyenletek (KDE) esetén y egyváltozós függvény. Többváltozós függvényekre parciális differenciálegyenletek vonatkoznak.

[1] @Forms

Lineáris közönséges differenciálegyenletek

A lineáris KDE-t a következő alakban írhatjuk fel:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + r(x) \ .$$

Ha $r(x) \neq 0$, akkor a differenciálegyenletet inhomogénnek nevezzük, ha $r(x) = 0$, akkor homogén KDE-ről beszélünk:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} \ .$$

Ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ kielégítik a homogén, lineáris differenciál egyenletet, akkor azok $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ lineáris kombinációi is kielégítik azt, ahol $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$. Egy n-ed rendű homogén, lineáris differenciál egyenletnek n lineárias független megoldása létezik.

Homogén lineáris közönséges differenciálegyenletek

A lineáris homogén KDE: $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}$. y_1 és y_2 is kielégíti a differenciálegyenletet:

$$y_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)}, \qquad y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_2^{(i)} .$$

Helyettesítsük be a két megoldás lineáris kombinációját a differenciál egyenletbe:

$$\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \left(\alpha y_1^{(i)} + \beta y_2^{(i)} \right) = \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)}}_{y_1^{(n)}} + \beta \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_2^{(i)}}_{y_2^{(n)}}$$

Egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy a jobb és baloldal megegyezik.

Inhomogén lineáris közönséges differenciálegyenletek

Az inhomogén és homogén differenciálegyenletek:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + r(x) \;, \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}$$

Ha az $y_0(x)$ függvény kielégíti a homogén egyenletet, az $y_p(x)$ pedig egy partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek, akkor az $y = \alpha y_0(x) + y_p(x)$ függvény is megoldása az inhomogén egyenletnek.

$$\alpha y_0^{(n)} + y_p^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \left(\alpha y_0^{(i)} + y_1^{(i)} \right) + r(x) = \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_0^{(i)}}_{y_0^{(n)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y_1^{(i)} + r(x)}_{y_p^{(n)}}$$

Az előző, homogén differenciálegyenletre vonatkozó tétel alapján, ha az $y_1(x), y_2(x) \ldots y_n(x)$ függvények kielégítik a homogén differenciálegyenletet, akkor a $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) + y_p(x)$ függvény is kielégíti az inhomogén differenciálegyenletet, ahol $\alpha_i \in \mathcal{C}$.

Elsőrendű differenciálegyenletek

Elsőrendű differenciálegyenlet

$$F(x, y, y') = 0\ , \qquad\qquad y' = f(x, y)$$

Kezdeti érték vagy Cauchy probléma:

$$y' = f(x, y)\ , \qquad y(x_0) = y_0$$

A $\varphi(x) : (a, b) \to \mathcal{R}$ $(a < b)$ függvény megoldásfüggvénye a differenciálegyeletnek, ha

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a, b)\ .$$

A φ megoldásfüggvénye a Cauchy problémának, ha van olyan (a, b) intervallum $(a < b)$, hogy

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\ \forall x \in (a, b) \text{ ahol } x_0 \in (a, b) \text{ és } \varphi(x_0) = y_0$$

Feltételezzük, hogy $\varphi(x)$ majdnem mindenütt differenciálható az (a, b) intervallumon.

Homogén elsőrendű differenciálegyenletek

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

$$y' = f(x)g(y)$$

$f(x)$ és $g(x)$ folytonos az (a, b) intervallumon és $g(y) \neq 0$ ezen a tartományon. Írjuk át a differenciálegyenletet és integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \,, \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \,, \quad C \in \mathcal{C}$$

Legyenek a primitív függvények

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad\qquad F(x) = \int f(x)dx \,.$$

Ekkor a megoldásra a következő implicit egyenletet kapjuk:

$$G(y) = F(x) + C$$

Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

Folyadékban mozgó testet, amelyre csak a sebességgel arányos súrlódási erő hat:[2]

$$ma = m\dot{v} = -\alpha v \Longrightarrow \dot{v} = -\frac{\alpha}{m} v$$

ALkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m} \int dt + \ln(C)$$
$$\ln(v) = -\frac{\alpha}{m} t + \ln(C)$$

Innen kifejezhetjük v-t:

$$v(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

Az elmozdulást újboli integrálással kaphatjuk meg:

$$x(t) = \int v(t) dt = x_0 - C\frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

[2] @Forms

Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

Harmonikus oszcillátor Írjuk fel egy harmonikus oszcillátor energiáját:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Átrendezve egy implicit elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 - E = 0$$

Rendezzük át explicit alakra és csinosítsuk egy kicsit a kifejezést:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának a módszerét:

Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}$$

Írjuk fel az integrálokat:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} = \int dt + C$$

Vezessük be az új, $y = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$ változót, ekkor $dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}dy$:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{1 - y^2}}dy = \sqrt{\frac{m}{k}}\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dt + C$$

Végezzük el az integrálokat és helyettesítsük vissza x-et:

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin(y) = t + C\ , \quad \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi$$

Homogén elsőrendű differenciálegyenletek

Példák szétválasztható változójú differenciálegyenletekre

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi$$

Vezessük be az $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ körfrekvenciát és fejezzük ki az x elmozdulást:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\omega t + \varphi)$$

Amikor a rugó megnyúlása a legnagyobb, a test sebessége éppen nullával egyenlő, vagyis a teljes energia megegyezik a rugó potenciális energiájával: $E = \dfrac{k}{2}A^2$, ahol A a mozgás amplitúdója. Az amplitúdó tehát $A = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \phi)}$$