

0.1.

Osztályozzuk a következő részecskéket a Fermi–Dirac- és a Bose–Einstein-statisztika alapján: α -részecske, ${}^3\text{He}$, H_2 molekula, pozitron, ${}^6\text{Li}^+$ ion és ${}^7\text{Li}^+$ ion.

Megoldás:

A proton (p), a neutron (n), az elektron (e^-), és a pozitron (e^+) fermionok. A válaszokat úgy adhatjuk meg, hogy megvizsgáljuk, az egyes részecskék hány fermionból állnak:

α -részecske = $2p + 2n =$ bozon,

${}^3\text{He} = 2p + n + 2e^- =$ fermion,

H_2 molekula = $2(p + e^-) =$ bozon ,

pozitron = $e^+ =$ fermion,

${}^6\text{Li}^+$ ion = $3p + 3n + 2e^- =$ bozon,

${}^7\text{Li}^+$ ion = $3p + 4n + 2e^- =$ fermion.

0.2.

Számítsuk ki az $\frac{1}{2}$ spinű részecskékből álló 3D ideális Fermi-gáz μ Fermipotenciálját és E belső energiáját T^2 rendig abban az esetben, amikor a degeneráció megfelelően nagy.

Megoldás:

A V térfogatú dobozban lévő szabad részecske $D(\epsilon)$ állapotsűrűsége

$$D(\epsilon) = \frac{2V}{h^3} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^\epsilon 4\pi p^2 dp = 2 \cdot 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2},$$

ahol $p^2 = 2m\epsilon$, a 2-es faktor pedig a spindegeneráció következménye. 0 K-en az energiaállapotok az $\epsilon = \mu_0$ szintig teljesen be vannak töltve. μ_0 meghatározható az

$$\int_0^{\mu_0} D(\epsilon) d\epsilon = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m}{h^2} \mu_0 \right)^{3/2} = N$$

összefüggés alapján, ahol N a részecskeszám, így

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

Ez alapján

$$D(\varepsilon) = \frac{3}{2}N\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_0^{-\frac{3}{2}}.$$

Véges hőmérsékleten az $N = \int f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon$ összefüggést használva

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{3}{2}N\mu_0^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}f(\varepsilon)D(\varepsilon) = N.$$

A Bethe–Sommerfeld sorfejtést

$$\int_{\varepsilon_0}^\infty g(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = \int_{\varepsilon_0}^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2g'(\mu) + o\left(\frac{kT}{\mu}\right)^4$$

(ahol $g(\varepsilon)$ folytonos, jól viselkedő függvény) alkalmazva, és $\varepsilon_0 = 0$ -t, illetve $g(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$ -et behelyettesítve elsőrendben:

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \dots\right] = 1,$$

tehát

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \dots\right]^{-2/3}.$$

Közelítve ($(1+x)^a \approx 1+ax+\dots$):

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \dots\right].$$

A belső energia:

$$E = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{3}{2}N\mu_0^{-3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2}f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Ismét alkalmazva a Bethe–Sommerfeld sorfejtést, elsőrendben:

$$E = \frac{3}{5}N\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{3/2} \mu \left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \dots\right].$$

Felhasználva a μ -re kapott kifejezést:

$$E = \frac{3}{5}N\mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \dots\right].$$

0.3.

Mutassuk meg, hogy az ideális Fermi-gáz C_V fajhőjére elegendően alacsony hőmérsékleten fennáll a

$$C_V = \frac{1}{3}\pi^2 k^2 T D(\mu_0)$$

összefüggés, ahol $D(\varepsilon)$ egy részecske állapotossűrűsége.

Megoldás:

0 K-en

$$\int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = N,$$

véges hőmérsékleten

$$\int_0^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N.$$

Alkalmazva a Bethe–Sommerfeld sorfejtést:

$$N = \int_0^{\mu} D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 D'(\mu) + \dots,$$

így

$$\int_{\mu_0}^{\mu} D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 D'(\mu) + \dots = 0.$$

Alacsony hőmérsékleten $\mu - \mu_0 \ll \mu_0, \mu$, így az előző egyenletet közelíthetjük:

$$(\mu - \mu_0)D(\mu_0) + \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 D'(\mu_0) + \dots = 0$$

Így

$$\mu \approx \mu_0 - \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 \left[\frac{d}{d\varepsilon} \ln D(\varepsilon) \right]_{\varepsilon=\mu_0}.$$

Hasonlóan sorfejtés után:

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 \left[\frac{d}{d\varepsilon} \varepsilon D(\varepsilon) \right]_{\varepsilon=\mu} + \dots.$$

Közelítve

$$\int_0^{\mu} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0)\mu_0 D(\mu_0) \approx \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{6}\pi^2 (kT)^2 \mu_0 D'(\mu_0),$$

az eredmény:

$$E \approx \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D(\mu_0).$$

Innen

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \approx \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0).$$

0.4.

Egy mintában N darab elektron van, az elektronok állapotossűrűsége

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D & , \text{ ha } \varepsilon > 0 \\ 0 & , \text{ ha } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

a.) Számítsuk ki a kémiai potenciált és a belső energiát 0 K-en, N függvényében! Ellenőrizzük, hogy az energia extenzív mennyiség-e!

b.) N és T segítségével adjuk meg annak feltételét, hogy a gáz nem degenerált!

c.) Számítsuk ki a fajhőt és a kémiai potenciált alacsony hőmérsékleten (erősen degenerált határeset)! (Segítség: használjuk a Bethe-Sommerfeld sorfejtést!)

Megoldás:

a.)

$$N = \int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = D\mu_0,$$

így

$$\mu_0 = \frac{N}{D}.$$

Az energia

$$E = \int_0^{\mu_0} \varepsilon D d\varepsilon = \frac{D\mu_0^2}{2} = \frac{N^2}{2D},$$

tehát, mivel az állapotossűrűség a térfogattal arányos ($D \propto V$), az energia extenzív mennyiség.

b.) Nemdegenerált határeset feltétele:

$$e^{-\beta\mu} \gg 1.$$

Ekkor

$$N = e^{\beta\mu} \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} D d\varepsilon = e^{\beta\mu} D kT,$$

tehát a nemdegeneráltság feltétele

$$e^{-\beta\mu} = \frac{DkT}{N} \gg 1,$$

jelentése: a kT intervallumban sokkal több állapot kell, hogy legyen, mint ahány részecske van a rendszerben. Más alakban felírva:

$$\frac{kT}{D} \equiv \frac{kT}{\mu_0} \gg 1,$$

c.) Bethe-Sommerfeld sorfejtés:

$$\int_0^\infty F(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^\mu F(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 F'(\mu).$$

Így

$$E(T \rightarrow 0) \simeq \int_0^\mu D\varepsilon d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 (D\varepsilon)'_\mu = \frac{1}{2} D\mu^2 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 D.$$

A fajhő számításához szükséges a kémiai potenciál hőmérsékletfüggésének ismerete. A részecskeszám (normaintegrál):

$$N = \int_0^\infty \frac{D(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)} + 1},$$

így

$$\mu = \mu_0 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{d}{d\varepsilon} \ln D(\varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=\mu_0}.$$

Alacsony hőmérsékleten a kémiai potenciál hőmérsékletfüggésétől eltekinthetünk:

$$C(T \rightarrow 0) = \frac{\partial E}{\partial T} = k \frac{\pi^2}{3} D kT,$$

a fajhő lineárisan indul.

Megjegyzés:

Az eredményt a Bethe-Sommerfeld sorfejtés nélkül is megkaphatjuk:

$\beta\mu \gg 1$ esetén

$$\begin{aligned} N &= D \left[\int_0^\mu d\varepsilon - \int_0^\mu \left(1 - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) d\varepsilon + \int_\mu^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right] = \\ &= D \left[\mu - \int_0^\mu \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} + \int_\mu^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right] \approx \\ &\approx D \left[\mu - \int_0^\infty \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} + \int_0^\infty \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} \right] = D\mu, \end{aligned}$$

6

és

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{\epsilon D d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = D \left[\int_0^\mu \epsilon d\epsilon - \int_0^\mu \frac{\epsilon d\epsilon}{e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + 1} - \int_\mu^\infty \frac{\epsilon d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \right] \approx \\ &\approx D \left[\frac{1}{2} \mu^2 + 2(kT)^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} D \mu^2 + \frac{1}{6} \pi^2 D (kT)^2. \end{aligned}$$

Az egyenlet első tagja nem függ a hőmérséklettől, így:

$$\frac{dE}{dT} \approx \frac{1}{3} \pi^2 D k^2 T.$$

0.5.

Mutassuk meg, hogy az ideális Fermi-gáz állapotegyenlete

$$pV = \frac{2}{3} U$$

alakban írható, és vezessük le a kompresszibilitásra vonatkozó képletet erős degeneráció esetén.

Megoldás:

A nagykanonikus partíciós függvényt használva

$$pV = kT \ln \Xi = kT \int_0^\infty D(\epsilon) d\epsilon \ln(1 + e^{\beta(\mu-\epsilon)}),$$

ahol szabad elektronok esetén

$$D(\epsilon) = C \epsilon^{1/2}, \quad \frac{2}{3} C \mu_0^{2/3} = N, \quad \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

Parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} pV &= \left(\frac{3}{2} N k T \mu_0^{-\frac{2}{3}} \right) \int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon \ln(1 + e^{\beta(\mu-\epsilon)}) = \\ &= \left(\frac{3}{2} N k T \mu_0^{-\frac{2}{3}} \right) \left(\left[\frac{2}{3} \epsilon^{\frac{3}{2}} \ln(1 + e^{\beta(\mu-\epsilon)}) \right]_0^\infty + \frac{2}{3} \beta \int_0^\infty \epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon (e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^{-1} \right) = \\ &= N \mu_0^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon f(\epsilon) = \frac{2}{3} \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{3} E. \end{aligned}$$

Felhasználva az előző feladatban kapott energia kifejezést:

$$pV = \frac{2}{5}N\mu_0 + \frac{\pi^2}{6}N\frac{k^2T^2}{\mu_0} + \dots$$

$v \equiv V/N$ jelöléssel:

$$p = \frac{2}{5}\frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2}{6}\frac{k^2T^2}{\mu_0v} + \dots$$

Az előző feladat alapján $\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi v} \right)^{2/3} \approx V^{-2/3}$, így a kompresszibilitás

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} = \left[\frac{2}{3}\frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2}{18}\frac{k^2T^2}{\mu_0v} + \dots \right]^{-1} = \\ &= \frac{3}{2}\frac{v}{\mu_0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

0.6.

Becsüljük meg a Fermi-energiát

- tipikus fémekben lévő elektronokra
- tipikus fémekben lévő nukleonokra (a mag sugara $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{m}$), A a nukleonok száma)
- He^3 folyadékban (az egy atom által elfoglalt térfogat $46.2 \cdot 10^{-30} \text{m}^3$)

Megoldás:

A Fermi-energia:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m},$$

ahol

$$k_F = \left(6\pi^2 \frac{N}{gV} \right)^{1/3},$$

g a spindegeneráció. (Mivel $N = g \sum_{|k| < k_F} 1$). Így

a.)

$$\frac{N}{V} \leq 10^{29} \text{m}^{-3}, \epsilon_F \approx 5 \text{eV}.$$

8

b.)

$$\frac{N}{V} \leq \frac{A}{r_0^3 A} = r_0^{-3} \approx 10^{45} m^{-3}, \varepsilon_F \approx 10^8 eV.$$

c.)

$$\varepsilon_F \approx 10^{-3} eV.$$

0.7.

Tegyük fel, hogy az elektronok között nincs kölcsönhatás! Milyen sűrű legyen az elektrongáz ahhoz, hogy a Fermi-felületen levő elektronok sebessége a fénysebesség fele legyen?

Megoldás:

$$\rho \approx 10^{35} m^{-3}.$$

0.8.

Hogyan aránylik egymáshoz a proton- és az elektrongáz adott sűrűségeen vett Fermi-hőmérséklete?

Megoldás:

$$kT_F = \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(6\pi^2 \frac{N}{gV} \right)^{2/3},$$

ez alapján:

$$\frac{T_F^e}{T_F^p} = \frac{m_p}{m_e}.$$

0.9.

Számítsuk ki a $T=0$ K hőmérsékletű ideális Fermi-gáz nyomását!

Megoldás:

$T = 0$ hőmérsékleten $S = 0$, így

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N.$$

A teljes energia:

$$E = g \sum_{|k| < k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} N \varepsilon_F = \frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(6\pi^2 \frac{N}{gV} \right)^{2/3},$$

ami alapján

$$p = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \frac{\hbar^2}{2m} \left(6\pi^2 \frac{N}{gV} \right)^{2/3}.$$

0.10.

Számítsuk ki a betöltési szám fluktuációját Fermi–Dirac statisztika esetén!

Megoldás:

A betöltési szám:

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}.$$

$$z = \prod_i z_i$$

$$z_i = \sum_{n=0}^{n_{\max}} e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)n}$$

$$P_i(n) = \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)n}}{z_i}$$

$$\langle n_i \rangle = \sum_n n P_i(n) = \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial(\beta\mu)}$$

$$\langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{z_i} \frac{\partial^2 z_i}{\partial(\beta\mu)^2} + (1 - \delta_{ij}) \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle$$

Így

$$\langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \delta_{ij} \langle n_i \rangle (1 - \langle n_i \rangle).$$

0.11.

Számítsuk ki a betöltési szám fluktuációját Bose–Einstein statisztika esetén!

Megoldás:

A betöltési szám:

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}.$$

Az előző feladat számolását felhasználva a fluktuáció:

$$\langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \delta_{ij} \langle n_i \rangle (1 + \langle n_i \rangle).$$

0.12.

Számítsuk ki a betöltési szám fluktuációját Boltzmann statisztika esetén!

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan A fluktuáció:

$$\langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \delta_{ij} \langle n_i \rangle (1 + \langle n_i \rangle).$$

Boltzmann–statisztika esetén $\langle n_i \rangle \ll 1$ ($e^{-\beta\mu} \gg 1$), így

$$\langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \delta_{ij} \langle n_i \rangle.$$

0.13.

Mutassuk meg, hogy kétdimenziós ideális Bose-gázban nem léphet fel Bose–Einstein kondenzáció!

Megoldás:

$L_x \times L_y$ területű tartományban lévő ideális gázmolekulák energianívóira teljesül az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} \epsilon(k_x, k_y) &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) \\ k_x &= \frac{2\pi n_x}{L_x}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, n_x, n_y = 0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

Bose–statisztika esetén a teljes részecskeszám

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT} - 1},$$

ahol az összegzést az összes energianívóra kell elvégezni. Feltéve, hogy L_x és L_y nagyok, az összegzés k térbeli integrálásra cserélhető:

$$N = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_x dk_y}{\exp\left(\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right) - 1},$$

ahol $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Így

$$\begin{aligned} N &= \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} 2\pi \int_0^\infty \frac{k dk}{\exp\left(\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right) - 1} = \\ &= 2\pi L_x L_y \frac{m}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}. \end{aligned}$$

Változócserevel:

$$N = 2\pi L_x L_y \frac{mkT}{h^2} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x - \beta\mu} - 1}.$$

Látható, hogy $\mu \rightarrow 0$ esetben az integrál divergál, azaz μ megfelelő megválasztásával a részecskeszám állandónak tartható tetszőlegesen alacsony hőmérsékleten, így nem lép fel BEC.

0.14.

Mutassuk meg, hogy egydimenziós ideális Bose-gázban nincs kondenzáció!

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan a részecskeszám változócsere után felírható:

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2 - \beta\mu} - 1}.$$

Látható, hogy $\mu \rightarrow 0$ esetben az integrál divergál, azaz μ megfelelő megválasztásával a részecskeszám állandónak tartható tetszőlegesen alacsony hőmérsékleten, így nem lép fel BEC.

0.15.

Állandó hőmérsékleten milyen sűrűségnél következik be a Bose-kondenzáció az ideális Bose-gázban? Hogyan függ a sűrűségtől a kondenzált részecskék

száma?

Megoldás:

Három dimezióban az állapotsűrűség:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2}.$$

Mivel a BEC megjelenését a kémiai potenciál zérussá válása jelzi, így a kritikus sűrűség:

$$\frac{N}{V} = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{d\epsilon \epsilon^{1/2}}{e^\epsilon - 1}.$$

$x \equiv \frac{\epsilon}{kT}$ változócserevel:

$$\frac{N}{V} = 2\pi \left(\frac{2mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{dx x^{1/2}}{e^x - 1}.$$

Ez alapján a kritikus sűrűség

$$\rho_c \propto T^{3/2}.$$

$\rho > \rho_c$ esetén a kondenzátumban lévő részecskéket (N_0) külön kell választanunk

$$N = N_0 + \sum_{k \neq 0} \bar{n}_k,$$

így

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\rho_c}{\rho}.$$

0.16.

A modellt a kölcsönható gázok egy leegyszerűsített leírására használjuk. A térfogatot b nagyságú cellákra osztjuk, egy részecske állapotát azzal adjuk meg, melyik cellában található. A merev gömböknek megfelelő rácsgázban a kölcsönhatás

$$u_{ij} = \begin{cases} \infty & , \text{ ha } i = j \\ 0 & , \text{ ha } i \neq j \end{cases}$$

alakú, ahol i és j a cellák indexe.

a.) Határozzuk meg az állapotegyenletet!

b.) Számítsuk ki a viriálegyütthatókat!

Megoldás:

a.)

Mivel $\frac{V}{b}$ számú cellában van N részecske, az állapotösszeg konfigurációs része:

$$Q = \binom{V/b}{N} b^N,$$

így

$$\frac{p}{kT} = \frac{\partial}{\partial V} \ln Q = -\frac{1}{b} \ln \left(1 - \frac{Nb}{V} \right).$$

Ritka gáz határesetben ($\rho = \frac{N}{V} \ll b^{-1}$) visszkapjuk az ideális gázra vonatkozó állapotegyenletet. $\rho = b^{-1}$ esetben $p \rightarrow \infty$, mivel több részecskét nem tudunk elhelyezni az adott térfogatban.

b.)

Az állapotegyenlet ρ szerinti sorfejtéséből

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Nb}{V} \right)^n \frac{1}{n},$$

tehát a viriálegyütthatók:

$$B_n = \frac{b^{n-1}}{n}.$$

0.17.

Szilárdtestben az atomok egyensúlyi helyzetük körül kis amplitúdójú rezgést végeznek. N atom esetén $3N$ normálmódus van. Az ω és $\omega + d\omega$ közti frekvenciájú módusok száma

$$g(\omega) = 3 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk,$$

és $k = \frac{\omega}{c}$, ahol c a hangsebesség. Az állapotsűrűség:

$$g(\omega)d\omega = V \frac{3\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega,$$

a Debye-frekvenciát az összes módus száma határozza meg:

$$3N = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega$$

$$\omega_D = c \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Határozzuk meg a teljes energiát és a fajhőt és elemezzük a hőmérsékletfüggést!

Megoldás:

Az energia

$$E = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \hbar\omega$$

$$\frac{E}{N} = \frac{9(kT)^4}{(\hbar\omega_D)^3} \int_0^{\beta\hbar\omega_D} dt \frac{t^2}{e^t - 1}.$$

A Debye-függvényt használva

$$\frac{E}{N} = 3kTD \left(\frac{T_D}{T} \right) = \begin{cases} 3kT \left(1 - \frac{3}{8} \frac{T_D}{T} + \dots \right) & , \text{ ha } T \gg T_D \\ 3kT \left[\frac{\pi^4}{15} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 + \dots \right] & , \text{ ha } T \ll T_D \end{cases},$$

ahol $T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$, Debye-hőmérséklet. Így

$$C_V(T \rightarrow \infty) \rightarrow 3Nk$$

és

$$C_V(T \rightarrow 0) \rightarrow \sim NkT^3.$$

A fajhő alacsony hőmérsékleten köbösen indul, majd magas hőmérsékleten belesimul a Dulong–Petit törvény által megadott értékbe.

0.18.

Mutassuk meg, hogy a fotongáz kémiai potenciálja 0.

Megoldás:

A tartályba zárt elektromágneses hullámokat rezgési normál módusoknak tekinthetjük. Az i -edik normál módus frekvenciája ν_i , n_i a módus kvantumszáma. Ekkor az (n_0, n_1, \dots) kvantumszámokkal meghatározott hullám energiája

$$E(n_0, n_1, \dots) = \sum_i n_i h\nu_i.$$

Ez alapján a fotongáz kanonikus partíciós függvénye

$$Z(T, V) = \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \exp \left[-\frac{E(n_0, n_1, \dots)}{kT} \right] = \prod_i \left(1 - e^{-\frac{h\nu_i}{kT}} \right)^{-1},$$

és

$$\bar{n}_j = \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j e^{-n_j \frac{h\nu_j}{kT}} \left[\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-n_j \frac{h\nu_j}{kT}} \right]^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_j}{kT}} - 1}.$$

Ezek az egyenletek egy $\mu = 0$ kémiai potenciálú ideális gáz egyenletei.

Megjegyzés:

Az eredmény egyszerűbben is megkapható: mivel a fotonok N számára nincsen megkötés, rögzített T és V mellett a szabadenergiát a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = 0$$

összefüggés minimalizálja, amely pontosan megegyezik a kémiai potenciál kifejezésével:

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \mu = 0.$$

0.19.

Számítsuk ki átlagtér tér közelítésben egy Ising-ferromágnes szabadenergiáját, fajhőjét, szuszceptibilitását a mágnesezettség függvényében!

Megoldás:

Molekuláris tér közelítésben

$$S_i S_j = -m^2 + mS_i + mS_j + (S_i - m)(S_j - m) \approx -m^2 + mS_i + mS_j.$$

Az állapotösszeg

$$\begin{aligned} Z &= \sum_S \exp \left[-\beta \left(J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i \right) \right] = \\ &= \sum_S \exp \left[-N \frac{zK}{2} m^2 + (zKm + h) \sum_i S_i \right] = e^{-N \frac{zK}{2} m^2} [2ch(zkM + h)]^N, \end{aligned}$$

ahol N a rácspontok száma, z az első szomszédok száma, $K = -\frac{J}{kT}$, $h = \frac{B}{kT}$,
 $m = \langle S_i \rangle = (zKm + h)$. Így a szabadenergia:

$$F = -kT \ln Z = N \left[-\frac{1}{2} zJm^2 - kT \ln[2ch(zKm + h)] \right],$$

a fajhő:

$$C_B = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_B = N \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{zJ}{2} m^2 - Bm \right) = N(zJm - B) \left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)_B,$$

a szuszceptibilitás pedig

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T = \frac{(kT)^{-1}}{ch^2(zKm + h) - zK}.$$

0.20.

Vizsgáljuk átlagtér tér közelítés segítségével, hogyan változik egy Ising-ferromágnes mágnesezettsége és szuszceptibilitása a fázisátalakulási ponthoz közeledve!

Megoldás:

Mint az előző feladatban láttuk, mágneses tér nélkül

$$m = th(-zJ\beta m).$$

$x \ll 1$ esetén $th(x) \approx x$, így $-zJ\beta < 1$ esetén az egyenletnek csak $m = 0$ a megoldása, nincs spontán mágnesezettség (magashőmérsékleti fázis). $-zJ\beta > 1$ esetben három megoldás van ($m = 0, m = \pm m_0 \neq 0$), mely esetben az $m \pm 0$ megoldás minimalizálja a szabadenergiát, így spontán mágnesezettség jelenik meg a rendszerben. A fázisátalakulás

$$kT_c = zJ$$

pontban következik be. A kritikus hőmérséklet alatt kicsi a mágnesezettség, így $th(-zJ\beta m)$ sorfejtése:

$$m \approx -zJ\beta m - \frac{1}{3}(-zJ\beta)^3 m^3.$$

Ez alapján $-zJ\beta > 1$ -re

$$m = \left(\frac{3(-zJ\beta - 1)}{(-zJ\beta)^3} \right)^{1/2} \propto (T_c - T)^{1/2}$$

A szuszceptibilitás megkapható (mágneses tér nélkül)

$$\chi = \left(\frac{\partial m}{\partial B} \right)_T = \frac{(kT)^{-1}}{ch^2(-zJ\beta m) + zJ\beta}.$$

$T > T_c$ esetén $m = 0$, így

$$\chi_{>} \approx \frac{1}{k(T - T_c)}.$$

$T < T_c$ esetén ch^2 -et sorbafejtve m^2 rendig:

$$\chi_{<} \approx \frac{1}{2k(T_c - T)}.$$

A fázisátalakulási pontban a szuszceptibilitás divergál analóg módon a Van der Waals gáz kompresszibilitásának kritikus pontbeli divergenciájával.

0.21.

Vizsgáljuk az Ising modellt egy dimenzióban, periodikus határfeltétellel (N részecske)! A partíciós függvény és a transzfermátrix segítségével határozzuk meg a szabadenergiát. Vizsgáljuk a mágnesezettség határeseteit!

Megoldás:

A partíciós függvény:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N} \exp \left[\beta \sum_{i=1}^N (Js_i s_{i+1} + Hs_i) \right] = \\ &= \sum_{s_1 \dots s_N} \exp \left[\beta \sum_{i=1}^N (\epsilon s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} H(s_i + s_{i+1})) \right]. \end{aligned}$$

A transzfermátrix:

$$\langle s | \hat{T} | s' \rangle \equiv T_{ss'} = \exp \left[\beta (Js s' + \frac{1}{2} H(s + s')) \right],$$

ahol $s, s' = \pm 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{s_1 \dots s_N} T_{s_1 s_2} T_{s_2 s_3} \cdots T_{s_{N-1} s_N} T_{s_N s_1} = \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | \hat{T} | \left(\sum_{s_2} |s_2\rangle \langle s_2| \right) \hat{T} | \left(\sum_{s_3} |s_3\rangle \langle s_3| \right) \cdots \langle s_N | \hat{T} | s_1 \rangle = \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | T^N | s_1 \rangle = \text{Tr}(T^N). \end{aligned}$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned}\langle +1|\hat{T}|+1\rangle &= \exp(\beta(J+H)) \\ \langle -1|\hat{T}|-1\rangle &= \exp(\beta(J-H)) \\ \langle +1|\hat{T}|-1\rangle &= \exp(\beta(-J)),\end{aligned}$$

T sajátértékei:

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \left[ch(\beta H) \pm \sqrt{sh^2(\beta H) + e^{-4\beta J}} \right].$$

Így

$$Z_N = Tr(T^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N.$$

$J > 0$ (ferromágnes), $T > 0$, így bármely H esetén $\lambda_+ > \lambda_-$, $N \rightarrow \infty$ esetén λ_- nem fontos, $Z_N \approx \lambda_+^N$. Ekkor a szabadenergia:

$$\begin{aligned}F &= -kT \ln(\lambda_+^N) = -NkT \ln \lambda_+ = \\ &= -NJ - NkT \ln \left[ch(\beta H) + \sqrt{sh^2(\beta H) + e^{-4\beta J}} \right].\end{aligned}$$

A határesetek:

$$M(H=0, T \neq 0) = 0$$

$$M(H \rightarrow \infty, T \neq 0) = N \left[1 - 2 \exp(-2\beta(H+2J)) \right]$$

$$M(H = \text{fix.}, T \rightarrow \infty) = N \frac{H}{kT}$$

(Curie-tv.)

$$M(H = \text{fix.}, T = \text{fix.}, J \rightarrow \infty) = N$$

(hőmérséklet nem veri szét a teljes rendet).

0.22.

Mutassuk meg alkalmas transzformációval, hogy a rácsgáz modell leképezhető az Ising modellre!

Megoldás:

Egy dimenzióban rácsgáz modell Hamilton függvénye:

$$H = -\mu \sum_j n_j - \varepsilon \sum_{\langle jk \rangle} n_j n_k,$$

ahol az egyes cellák betöltési száma $n_i = 0, 1$, ε pedig a szomszédos cellák közötti kölcsönhatás. Hogy belássuk az ekvivalenciát, változó transzformációt végzünk: $n_i \equiv (s_j + 1)/2$. Ezzel a cserével

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\mu}{2} \sum_j (s_j + 1) - \frac{\varepsilon}{4} \sum_{\langle jk \rangle} (s_j + 1)(s_k + 1) = \\ &= -\frac{\varepsilon}{4} \sum_{\langle jk \rangle} s_j s_k - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2} \sum_{\langle jk \rangle} s_j - \frac{\mu}{2} \sum_j s_j - \frac{\varepsilon}{4} \sum_{\langle jk \rangle} 1 = \\ &= -\frac{\varepsilon}{4} \sum_{\langle jk \rangle} s_j s_k - \left(\frac{N\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \sum_j s_j - \frac{N\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Ez alapján látható az izomorfia a rácsgáz és az Ising modell között, a betöltött (üres) cellának felfelé (lefelé) álló spin felel meg, a csatolás: $J = \varepsilon/4$, a mágneses tér: $h = \frac{N\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2}$ (az energiában megjelenő konstans járulék természetesen nem okoz gondot).

0.23.

Egy kölcsönható gázban a részecskék közötti párpotenciál a következő:

$$u(r) = \begin{cases} u_0 & \text{ha } 0 \leq r < r_0 \\ -u_0 & \text{ha } r_0 \leq r < \alpha r_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases},$$

ahol $u_0 > 0$ és $\alpha > 1$.

- (a) Írja fel a gáz állapotegyenletét a viriálsorfejtés első nemtriviális tagjáiig!
- (b) Ebben a közelítésben számítsa ki azt a T^* hőmérsékletet, ahol a nyomás megegyezik az ugyanolyan hőmérsékletű (és sűrűségű) ideális gáz nyomásával! Milyen α -ra létezik ilyen T^* hőmérséklet?

Megoldás

(a) A viriálegyüttható:

$$\begin{aligned} B_2(T) &= -2\pi \int_0^\infty \left(e^{-\beta u(r)} - 1 \right) r^2 dr \\ &= -2\pi \left(e^{-\beta u_0} - 1 \right) \frac{r_0^3}{3} - 2\pi \left(e^{\beta u_0} - 1 \right) \frac{r_0^3}{3} (\alpha^3 - 1) \\ &= -\frac{V_0}{2} \left(e^{-\beta u_0} - 1 + (\alpha^3 - 1) \left(e^{\beta u_0} - 1 \right) \right), \end{aligned}$$

ahol

$$V_0 = \frac{4\pi r_0^3}{3}.$$

Az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned} p &= nk_B T + n^2 k_B T B_2(T) \\ &= nk_B T - n^2 k_B T \frac{V_0}{2} \left(e^{-\beta u_0} - 1 + (\alpha^3 - 1) \left(e^{\beta u_0} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

(b) Keressük azon T^* hőmérsékletet, melyre

$$B_2(T^*) = 0 \implies e^{-\beta^* u_0} - 1 + (\alpha^3 - 1) \left(e^{\beta^* u_0} - 1 \right) = 0,$$

ahol $\beta^* = 1/k_B T^*$. Bevezetve az $x = e^{\beta^* u_0} (> 1)$ jelölést, a

$$(\alpha^3 - 1)x^2 - \alpha^3 x + 1 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, melynek megoldásai

$$x_{12} = \frac{\alpha^3 \pm \sqrt{\alpha^6 - 4(\alpha^3 - 1)}}{2(\alpha^3 - 1)} = \frac{\alpha^3 \pm |\alpha^3 - 2|}{2(\alpha^3 - 1)} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\alpha^3 - 1} \end{cases},$$

ha $\alpha \neq \sqrt[3]{2}$. $x = 1$ a triviális $T^* \rightarrow \infty$ 'megoldást' jelenti. Figyelembevétel az $x > 1$ feltételt, nemtriviális megoldás csak $\alpha < \sqrt[3]{2}$ esetén létezik:

$$\beta^* u_0 = -\ln(\alpha^3 - 1) \implies T^* = -\frac{u_0}{k_B \ln(\alpha^3 - 1)}.$$

($\alpha = \sqrt[3]{2}$ esetén $x_1 = x_2 = 1$.)

0.24.

Egy kölcsönható gázban a molekulák között ható párpotenciált a következő függvény írja le:

$$u(r) = \begin{cases} -u_0 \ln(r/r_0) & \text{ha } 0 < r < r_1 \\ 0 & \text{ha } r \geq r_1 \end{cases},$$

($u_0 > 0, r_1 > r_0$).

- (a) Írja fel a gáz állapotegyenletét a viriálsorfejtés első nemtriviális tagjáig!
- (b) Ebben a közelítésben és az $u_0/k_B T \rightarrow 0$ határesetben számítsa ki azt a T^* hőmérsékletet, ahol a nyomás megegyezik az ugyanolyan hőmérsékletű és sűrűségű ideális gáz nyomásával! Mi a feltétele T^* létezésének? (Használja a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2$ azonosságot!)

Megoldás

- (a) A viriálegyüttható:()

$$\begin{aligned} B_2(T) &= -2\pi \int_0^\infty (e^{-\beta u(r)} - 1) r^2 dr \\ &= -2\pi \int_0^{r_1} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta u_0} - 1 \right] r^2 dr \\ &= \frac{2\pi r_1^3}{3} - 2\pi r_0^3 \int_0^{r_1/r_0} t^{2+\beta u_0} dt \\ &= \frac{2\pi r_1^3}{3} - \frac{2\pi r_0^3}{(3+\beta u_0)} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{3+\beta u_0} \\ &= \frac{2\pi r_1^3}{3} \left(1 - \frac{1}{1+\beta u_0/3} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\beta u_0} \right). \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet tehát:

$$\begin{aligned} p &= nk_B T + n^2 k_B T B_2(T) \\ &= nk_B T + n^2 k_B T \frac{2\pi r_1^3}{3} \left(1 - \frac{1}{1+\beta u_0/3} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\beta u_0} \right). \end{aligned}$$

(b) Keressük azon T^* hőmérsékletet, melyre

$$B_2(T^*) = 0 \implies \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\beta^* u_0} = 1 + \frac{\beta^* u_0}{3},$$

ahol $\beta^* = 1/k_B T^*$. Bevezetve az $x = \beta^* u_0$ ($x > 0$) jelölést, az

$$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^x = 1 + \frac{x}{3},$$

egyenlet megoldhatóságának feltételét keressük. Mindkét oldali függvény $x = 0$ -ban az 1 értéket veszi fel, azaz $T^* \rightarrow \infty$ (mint mindig) triviális megoldás. Ugyanakkor mindkét függvény monoton nő és könnyen belátható, hogy $x > 0$ metszéspontjunk akkor van, ha az $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^x$ függvény deriváltja $x = 0$ -ban kisebb mint $\frac{1}{3}$,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^x = \ln \frac{r_1}{r_0} \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^x \implies \ln \frac{r_1}{r_0} < \frac{1}{3} \implies \underline{r_1 < e^{1/3} r_0 = 1.396 r_0}.$$

A magas hőmérsékleti megoldást ($|x| \ll 1$) keresve is ugyanerre az eredményre jutunk. Logaritmust vonva ugyanis:

$$x \ln \frac{r_1}{r_0} = \ln(1 + x/3) \simeq \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} \implies$$

$$x = -18 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{3} \right) > 0,$$

amiből a $\ln \frac{r_1}{r_0} < \frac{1}{3}$ feltétel adódik. Ekkor

$$T^* = \frac{u_0}{6k_B \left(1 - 3 \ln \frac{r_1}{r_0}\right)}.$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti kifejezés $r_1 \rightarrow e^{1/3} r_0$ határesetben egyre jobban közelíti az egzakt megoldást.

0.25.

Egy reális gáz állapotegyenlete a következő:

$$p = nk_B T - Bn^2 + Cn^3,$$

ahol B, C pozitív konstansok, és $n = 1/v = N/V$.

- (a) Számítsa ki a termodinamikai változók kritikus értékeit (p_c, T_c, n_c)!
 (b) Írja fel a redukált állapotegyenletet!
 (c) Határozza meg az izotermikus kompresszibilitás viselkedését T_c körül!

Segítség:

$$\kappa_T^{-1} = -V \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T^{-1} = n \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_T.$$

Megoldás

- (a) Kritikus paraméterek:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = k_B T - 2Bn + 3Cn^2$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = -2B + 6Cn$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \right|_{n_c} = 0 \implies n_c = \frac{B}{3C}$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{n_c, T_c} = 0 \implies k_B T_c = 2Bn_c - 3Cn_c^2 = 2B \frac{B}{3C} - 3C \left(\frac{B}{3C} \right)^2 = \frac{B^2}{3C} = Bn_c$$

$$T_c = \frac{B^2}{3k_B C}$$

$$p_c = n_c k_B T_c - Bn_c^2 + Cn_c^3 = Bn_c^2 - Bn_c^2 + Cn_c^3 = Cn_c^3 = \frac{B^3}{27C^2}$$

- (b) Redukált állapotegyenlet

$$\bar{p} \equiv \frac{p}{p_c}, \bar{T} \equiv \frac{T}{T_c}, \bar{n} \equiv \frac{n}{n_c}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}p_c &= \bar{n}k_B\bar{T}n_cT_c - B\bar{n}^2n_c^2 + C\bar{n}^3n_c^3 \\ \bar{p} &= \bar{n}\bar{T}\frac{n_ck_BT_c}{p_c} - \bar{n}^2\frac{Bn_c^2}{p_c} + \bar{n}^3\frac{Cn_c^3}{p_c} \\ \frac{n_ck_BT_c}{p_c} &= \frac{B}{Cn_c} = 3, \quad \frac{Bn_c^2}{p_c} = \frac{B}{Cn_c} = 3, \quad \frac{Cn_c^3}{p_c} = 1 \\ \bar{p} &= \underline{3\bar{n}\bar{T} - 3\bar{n}^2 + \bar{n}^3}\end{aligned}$$

(c) Izotermikus kompresszibilitás

$$\begin{aligned}\kappa_T &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \implies \kappa_T^{-1} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = n \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_T = p_c \bar{n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} \right)_{\bar{T}} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} &= 3\bar{T} - 6\bar{n} + 3\bar{n}^2\end{aligned}$$

A kritikus pont körül:

$$\begin{aligned}\kappa_T^{-1} &= p_c \bar{n} (3\bar{T} - 6\bar{n} + 3\bar{n}^2) \xrightarrow{\bar{n}=1} \kappa_T^{-1} = p_c (3\bar{T} - 3) = \frac{B^3}{9C^2} (\bar{T} - 1) \\ \kappa_T &= \underline{\frac{9C^2}{B^3} \frac{1}{\bar{T} - 1}}\end{aligned}$$